Dr Antonije R. Đorđević
Mr Gradimir N. Božilović
Dr Branislav M. Notaroš

ZBIRKA REŠENIH ISPITNIH ZADATAKA IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE

I deo

Drugo izdanje

Elektrostatika

Stalne električne struje

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET
AKADEMSKA MISAO
Beograd, 2001.

Dr Antonije R. Đorđević
Mr Gradimir N. Božilović
Dr Branislav M. Notaroš

ZBIRKA REŠENIH ISPITNIH ZADATAKA
IZ OSNOVA ELEKTROTEHNIKE - I deo
drugo izdanje

Recenzenti
Akademik dr Jovan V. Surutka
Prof. dr Hildegard A. Božilović

Izdavač
Elektrotehnički fakultet, Beograd
Akademska misao, Beograd

Izdavačka delatnost Elektrotehničkog fakulteta
11 000 Beograd, Bulevar kralja Aleksandra 73
telefon/faks: 3218-354 faks: 3248-681

Tiraž 500 primeraka

Štampa
Zavod za grafičku tehniku Tehnološko-metalurškog fakulteta,
Karnegijeva 4, Beograd

ISBN 86-7466-046-0

PREDGOVOR

Knjiga "Zbirka rešenih ispitnih zadatka iz Osnova elektrotehnike", čiji prvi deo čitalac ima pred sobom, sadrži zadatke i pitanja sa ispita i kolokvijuma iz predmeta Osnovi elektrotehnike koji su održani na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu i u odeljenju ovoga fakulteta na Vojnotehničkoj akademiji u Žarkovu, u periodu od 1989. do 1997. godine. Ovaj, prvi, deo Zbirke obrađuje gradivo predviđeno za prvi semestar, iz Elektrostatike i Stalnih električnih struja. Drugi deo Zbirke, čiji se završetak očekuje uskoro, obuhvata Elektromagnetizam i Naizmenične struje, koji se obrađuju u drugom semestru. Zadaci i pitanja su, u Zbirci, sređeni po oblastima, a u okviru oblasti i prema redosledu izvođenja nastave. Većina zadataka je detaljno rešena, a zastupljena su i pitanja i zadaci kod kojih je naveden samo odgovor ili rezultat, kako bi čitalac time mogao da proveri svoje rešenje.

I u ovoj Zbirci je realizovan koncept i način izvođenja nastave iz predmeta Osnovi elektrotehnike koji se na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu uspešno realizuje već četvrt veka. Metodički, Zbirka je u potpunosti usaglašena sa knjigama iz Osnova elektrotehnike navedenim u Literaturi na kraju ove knjige i sa njima čini celinu. Radi identifikacije odgovarajućeg ispitnog roka ili kolokvijuma, na kraju teksta svakog pitanja i zadatka data je šifra koja se sastoji od slova "P" za pitanje, slova "Z" za zadatak i po dve cifre za godinu, mesec i dan.

Većinu pitanja i zadataka obuhvaćenih Zbirkom sastavila su prva dva autora, a manji broj treći autor. Neke ideje, pitanja i zadaci potiču od akademika dr Branka Popovića, redovnog profesora, dr Hildegard Božilović, vanrednog profesora, mr Radmile Stojić, stručnog savetnika, i mr Slavoljuba Markovića, asistenta, koji zajedno sa autorima izvode nastavni proces iz Osnova elektrotehnike na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, pa im se autori najsrdačnije zahvaljuju. Sistematizaciju i obradu pitanja i zadataka, kao i tehničku pripremu Zbirke, obavio je trećepotpisani autor. Autori se iskreno zahvaljuju mr Oliveri Notaroš i Miroslavu Đorđeviću, studentu–saradniku pri predmetu Osnovi elektrotehnike, čija je pomoć bila dragocena pri izradi slika.

Doajen naše struke akademik dr Jovan Surutka i dr Hildegard Božilović, vanredni profesor, su obavili recenziju rukopisa, na čemu im se autori najtoplije zahvaljuju.

Autori će sa zahvalnošću primiti i pažljivo proučiti sve primedbe i sugestije, kako u vezi sa materijom, tako i sa eventualnim greškama u tekstu, kako bi Zbirka ispunila svoju namenu – dalje poboljšanje nastave i olakšavanje sticanja znanja iz Osnova elektrotehnike.

U Beogradu, aprila 1997. godine

Autori

SADRŽAJ

1. ELEKTROSTATIKA

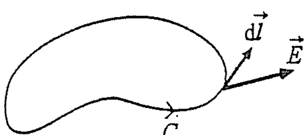
1. Napisati osnovne integralne jednačine za elektrostatičko polje u vakuumu. (*P900124*)

REŠENJE:
Osnovne integralne jednačine za elektrostatičko polje u vakuumu su

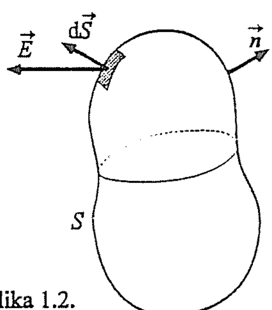
$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \,, \tag{1.1}$$

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_S}{\epsilon_0} \,, \tag{1.2}$$

gde je $\boldsymbol{E}$ vektor jačine električnog polja, C proizvoljna zatvorena putanja (kontura), skicirana na slici 1.1, S proizvoljna zatvorena površ, orijentisana upolje (slika 1.2), Q_S naelektrisanje obuhvaćeno površi S, a ϵ_0 permitivnost vakuuma ($\epsilon_0 \approx 8{,}8542\,\mathrm{pF/m}$). Jednačina (1.2) predstavlja Gausov zakon.



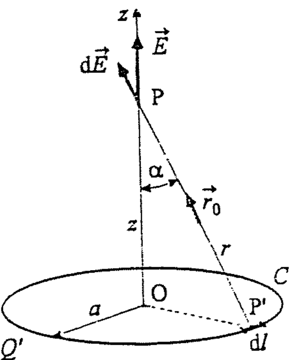
Slika 1.1.



Slika 1.2.

2. Veoma tanka kružna kontura, poluprečnika a, ravnomerno je naelektrisana naelektrisanjem podužne gustine Q'. Sredina je vazduh. Izvesti izraz za vektor jačine električnog polja na osi konture normalnoj na ravan konture. (*P940130*)

REŠENJE:



Slika 2.1.

U smislu primene principa superpozicije, konturu ćemo izdeliti na elementarne delove, dužine dl (slika 2.1), te polje svakog takvog naelektrisanog dela odrediti kao polje tačkastog naelektrisanja $dQ = Q'\,dl$. Vektor jačine toga polja u tački P na osi z, prema slici 2.1, iznosi

$$dE = \frac{Q'\,dl}{4\pi\epsilon_0 r^2}r_0\,, \quad r = \sqrt{z^2+a^2}\,, \tag{2.1}$$

gde koordinata z definiše položaj tačke P. Vektor jačine rezultantnog polja se dobija kao

$$E = \oint_C dE\,. \tag{2.2}$$

Zbog simetrije, radijalna komponenta vektora E ne postoji, pa vektor E ima samo aksijalnu komponentu,

$$E = E_z = \oint_C dE_z\,, \quad dE_z = dE\cos\alpha = dE\frac{z}{r}\,. \tag{2.3}$$

Zamenom izraza za dE iz (2.1) u (2.3), dobijamo

$$E_z = \frac{Q'z}{4\pi\epsilon_0 r^3}\oint_C dl = \frac{Q'az}{2\epsilon_0 r^3}\,, \tag{2.4}$$

odnosno

$$E = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0\,(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}k\,, \tag{2.5}$$

gde je $Q = Q'2\pi a$ ukupno naelektrisanje konture.

Preporučuje se čitaocu da nacrta funkciju $E_z(z)$, $-\infty < z < \infty$, duž ose konture, pod pretpostavkom $Q' > 0$, i da izračuna za koje z ta funkcija ima maksimum, odnosno minimum.

3. Koja je integralna, a koja diferencijalna relacija između vektora jačine električnog polja i potencijala, za elektrostatičko polje? Na primeru homogenog polja, pokazati da su te dve relacije ekvivalentne. (*P961122*)

RЕŠENJE:
Tražene relacije su

$$V_M = V_N + \int_M^N E \cdot dl\,, \tag{3.1}$$

$$E_l = -\frac{dV}{dl}\,, \tag{3.2}$$

gde su V_M i V_N potencijali proizvoljnih tačaka M i N (u odnosu na istu referentnu tačku nultog potencijala), a E_l je projekcija vektora jačine električnog polja E na proizvoljnu osu l. Putanja integracije u (3.1) je proizvoljna.

Na slici 3.1 prikazano je homogeno električno polje, čija je jačina E, i proizvoljne tačke M i N u polju. Jednačina (3.1) se sada može napisati u obliku

$$V_M = V_N + E\cdot\int_M^N dl = V_N + E\cdot\overline{MN} =$$

$$V_N + Ed\cos\alpha = V_N + E_l d\,, \tag{3.3}$$

Slika 3.1.

odnosno

$$E_l = -\frac{V_N - V_M}{d}\,, \tag{3.4}$$

gde je $d = \overline{MN}$, a α ugao između vektora E i $\overline{MN}$. Očigledno, jednačine (3.4) i (3.2) su, u slučaju homogenog polja, ekvivalentne, što je i trebalo pokazati.

4. U jednom delu prostora elektrostatički potencijal je konstantan u svim tačkama bilo koje ravni upravne na Dekartovu x-osu, ali se menja od tačke do tačke duž te ose kao $V(x) = V_0x/d + V_1$, gde su V_0, V_1 i d konstante. Odrediti vektor jačine električnog polja u tom prostoru. (*P920920*)

RЕŠENJE:
Pošto je $dV/dy = 0$ i $dV/dz = 0$, vektor jačine električnog polja, na osnovu relacije (3.2), ima samo Dekartovu x-komponentu, koja iznosi

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{V_0}{d}\,. \tag{4.1}$$

Preporučuje se čitaocu da odredi gustinu naelektrisanja, ρ, u posmatranom delu prostora, ako je u njemu vakuum.

5. Data je ravnomerno naelektrisana kružna kontura, poluprečnika a, u vazduhu. Podužna gustina naelektrisanja konture je Q'. (a) Koliki je potencijal na osi konture normalnoj na ravan konture, u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti? (b) Polazeći od izraza za potencijal, izvesti izraz za električno polje na osi konture. (*P960904*)

RЕŠENJE:
(a) Uočimo element konture dužine dl (slika 2.1). Pri računanju potencijala, taj element tretiramo kao tačkasto naelektrisanje $dQ = Q'\,dl$. Na taj način, elementarni potencijal u tački P (definisanoj koordinatom z) na osi konture, u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti, iznosi

$$dV = \frac{Q'\,dl}{4\pi\epsilon_0 r}\,, \quad r = \sqrt{z^2+a^2}\,. \tag{5.1}$$

Po principu superpozicije, traženi potencijal u tački P se dobija kao

$$V = \oint_C \mathrm{d}V \,, \tag{5.2}$$

tj.

$$V = \frac{Q'a}{2\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{z^2+a^2}} \qquad (Q = Q'2\pi a) \,. \tag{5.3}$$

(b) Zbog simetrije, vektor jačine električnog polja u tački P ima samo z-komponentu, koja, na osnovu relacije (3.2), iznosi

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} \,. \tag{5.4}$$

Zamenom izraza za potencijal iz (5.3) u (5.4), te diferenciranjem, dobijamo izraz za polje (2.5).

Obrnuto, izraz za potencijal se može dobiti na osnovu izraza za polje, koristeći se sledećom vezom:

$$V = \int_z^{\infty} E_z \, \mathrm{d}z \,. \tag{5.5}$$

6. Vlakno u obliku polukruga, poluprečnika a, ravnomerno je naelektrisano naelektrisanjem podužne gustine Q' (slika 6.1). Vlakno se nalazi u vakuumu. Odrediti potencijal i vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački na osi z.

REŠENJE:
Potencijal se računa isto kao u zadatku 5, samo se u jednačini (5.2) integrali po polovini kruga. Stoga je on tačno 1/2 potencijala na osi vlakna u obliku (punog) kruga poluprečnika a ravnomerno naelektrisanog naelektrisanjem podužne gustine Q'. Tako, na osnovu izraza (5.3) imamo

$$V = \frac{Q'a}{4\epsilon_0\sqrt{z^2+a^2}} \,. \tag{6.1}$$

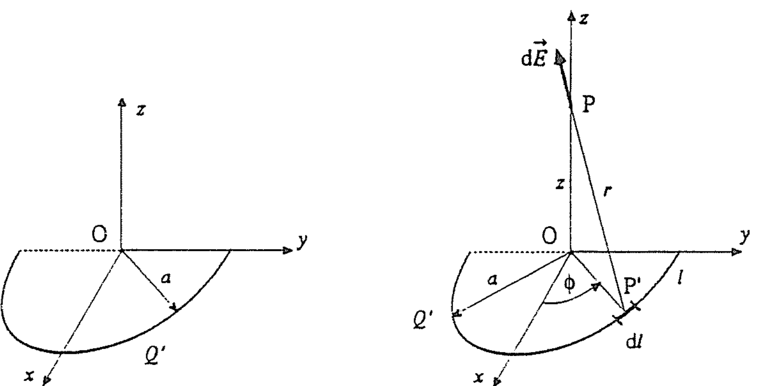
Vektor jačine polja na z-osi usled naelektrisanja $Q'\,\mathrm{d}l$ (slika 6.2) dat je izrazom (2.1). Taj vektor je potrebno razložiti na pogodne komponente. Razložićemo ga, najpre, na horizontalnu i vertikalnu komponentu (slika 6.3),

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_\mathrm{h} + \mathrm{d}E_z\boldsymbol{k} \,, \quad \mathrm{d}E_\mathrm{h} = \mathrm{d}E\sin\alpha \,, \quad \sin\alpha = \frac{a}{r} \,,$$

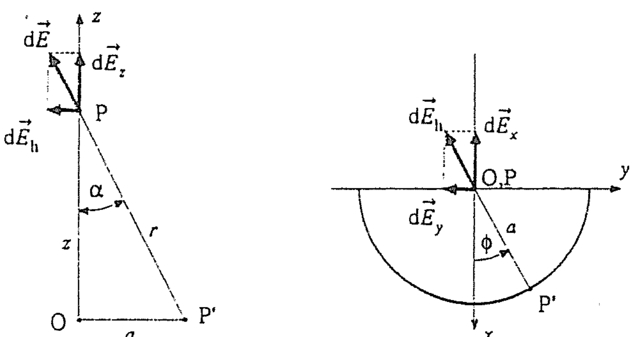
$$\mathrm{d}E_z = \mathrm{d}E\cos\alpha \,, \quad \cos\alpha = \frac{z}{r} \,. \tag{6.2}$$

Pošto se pravac vektora $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\mathrm{h}$ menja tokom integracije (dok tačka P' obilazi polukrug), potrebno je njegovo dalje razlaganje (slika 6.4),

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}_\mathrm{h} = \mathrm{d}E_x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}E_y\boldsymbol{j} \,, \quad \mathrm{d}E_x = -\mathrm{d}E_\mathrm{h}\cos\phi \,, \quad \mathrm{d}E_y = -\mathrm{d}E_\mathrm{h}\sin\phi \tag{6.3}$$



Slika 6.1. Slika 6.2.



Slika 6.3. Slika 6.4.

(ϕ je cirkularni ugao, $-\pi/2 \le \phi \le \pi/2$). Na osnovu gornjih izraza, i veze $\mathrm{d}l = a\,\mathrm{d}\phi$, imamo

$$E_x = \int_l \mathrm{d}E_x = -\frac{Q'a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\,\mathrm{d}\phi = -\frac{Q'a^2}{2\pi\epsilon_0 r^3} \,, \tag{6.4}$$

$$E_y = \int_l \mathrm{d}E_y = -\frac{Q'a^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi = 0 \,, \tag{6.5}$$

$$E_z = \int_l \mathrm{d}E_z = \frac{Q'az}{4\pi\epsilon_0 r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi = \frac{Q'az}{4\epsilon_0 r^3} \,, \tag{6.6}$$

odnosno,

$$\boldsymbol{E} = \frac{Q'a}{2\epsilon_0 r^3}\left(-\frac{a}{\pi}\boldsymbol{i} + \frac{z}{2}\boldsymbol{k}\right) \,, \qquad r = \sqrt{z^2+a^2} \,. \tag{6.7}$$

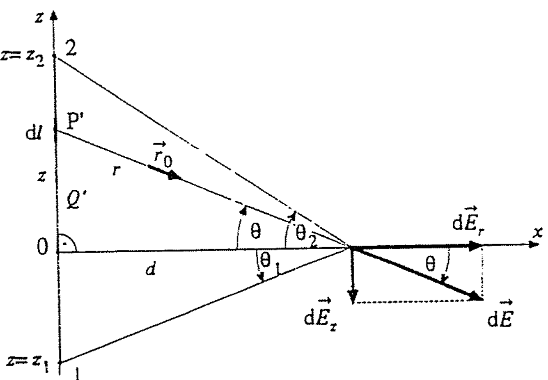
Indirektnim računanjem polja, diferenciranjem potencijala, u ovome primeru možemo dobiti samo deo rešenja, naime, komponentu $E_z = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}z$. Da bismo mogli da izračunamo x-komponentu polja kao $E_x = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$, morali bismo znati funkciju potencijala, $V(x,y,z)$, u ravni $y=0$, makar za male vrednosti $|x|$ (tj. u okolini z-ose).

7. Pravolinijska nit dužine l ravnomerno je naelektrisana ukupnim naelektrisanjem Q. Nit se nalazi u vakuumu. Odrediti vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački prostora.

REŠENJE:
Duž (naelektrisana nit) i tačka u kojoj treba odrediti polje su uvek u istoj ravni; neka to bude ravan crteža (slika 7.1). Geometriju problema možemo definisati sa tri podatka: koordinatama z_1 i z_2 (odnosno uglovima θ_1 i θ_2) i (normalnim) odstojanjem tačke od niti d. Pri tome je $z_2 - z_1 = l$. [Za položaj tačke P usvojen na slici 7.1 je $z_1 < 0$ ($\theta_1 < 0$) i $z_2 > 0$ ($\theta_2 > 0$).] Naelektrisanje niti se može smatrati linijskim, podužne gustine $Q' = Q/l$. Uočimo element niti dužine $dl = dz$ u tački P' čija je podužna koordinata z, a odgovarajući ugao θ. Polje toga elementa u tački P je

$$\mathrm{d}E = \frac{Q'\,\mathrm{d}z}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,r_0\,, \qquad r = \sqrt{z^2+d^2} \qquad (7.1)$$

Vektor $\mathrm{d}E$ ćemo razložiti na radijalnu (x) i aksijalnu (z) komponentu,



Slika 7.1.

$$\mathrm{d}E_r = \mathrm{d}E\cos\theta\,, \quad \mathrm{d}E_z = -\mathrm{d}E\sin\theta\,. \qquad (7.2)$$

Nije teško pokazati da između podužne koordinate z i ugaone koordinate θ postoje sledeće relacije:

$$\tan\theta = \frac{z}{d}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\mathrm{d}z}{d}\,, \qquad \cos\theta = \frac{d}{r}\,, \qquad (7.3)$$

pri čemu je druga relacija dobijena diferenciranjem prve. Zamenom izraza za $\cos\theta$ iz treće relacije u drugu, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}z}{r^2} = \frac{\mathrm{d}\theta}{d}\,. \qquad (7.4)$$

Konačno, kombinovanjem jednačina (7.1), (7.2) i (7.4), te primenom principa superpozicije, dobijamo

$$E_r = \int_l \mathrm{d}E_r = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 d}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,, \quad E_z = \int_l \mathrm{d}E_z = -\frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 d}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,, \quad (7.5)$$

odnosno, nakon rešavanja integrala,

$$E_r = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 d}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\,, \quad E_z = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 d}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,, \qquad (7.6)$$

te je

$$E = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 d}\left[(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\,i + (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\,k\right]\,. \qquad (7.7)$$

8. Naelektrisanje konstantne podužne gustine Q' raspodeljeno je u vakuumu duž negativnog dela x-ose Dekartovog koordinatnog sistema ($-\infty < x \le 0$). Odrediti izraz za vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački u xOy ravni. (*Z921020*)

REZULTAT:
Primenom postupka opisanog u prethodnom zadatku, dobija se sledeći izraz: $E = Q'\left[i/\sqrt{x^2+y^2} + \left(1 - x/\sqrt{x^2+y^2}\right)j/y\right]/(4\pi\epsilon_0)$.

9. Linijsko naelektrisanje je u vakuumu raspoređeno duž x-ose Dekartovog koordinatnog sistema. Podužna gustina naelektrisanja je Q' za $-\infty < x \le 0$, a $-Q'$ za $0 < x < \infty$. Izvesti izraz za vektor jačine električnog polja u tački M sa koordinatama $(0, d, 0)$, pri čemu je $d > 0$. (*Z961122*)

REZULTAT:
Traženi izraz je $E = Q'i/(2\pi\epsilon_0 d)$.

10. Disk poluprečnika a, zanemarljive debljine, ravnomerno je naelektrisan naelektrisanjem površinske gustine σ i nalazi se u vakuumu. Odrediti izraze za potencijal i vektor jačine električnog polja na osi diska normalnoj na ravan diska. (*Z940923*)

REŠENJE:
Izdelićemo disk na tanke prstenove, poluprečnika R i širine $\mathrm{d}R$ (slika 10.1). Svaki takav prsten tretiraćemo kao kružnu nit, poluprečnika R, sa ukupnim naelektrisanjem

$$\mathrm{d}Q = \sigma\,\mathrm{d}S\,; \quad \mathrm{d}S = 2\pi R\,\mathrm{d}R\,. \qquad (10.1)$$

хоризонтална компонента се поништава због симетрије

Potencijal i polje ekvivalentne kružne niti u tački P na z-osi iznose [videti jednačine (5.3) i (2.5)]

$\vec{E}_{v} = \vec{E}\cdot\cos\alpha$ $\quad d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\alpha\cdot\vec{k}$ $\quad \frac{z}{r} = \cos\alpha$

вертикална компонента

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\epsilon_0 r}, \qquad \mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}k\,, \quad ??$$

$$r = \sqrt{R^2+z^2}\,. \tag{10.2}$$

Superpozicijom doprinosa potencijalu i polju pojedinih elementarnih prstenova dobijamo

$$V = \int_S \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{R=0}^{a}\frac{R\,\mathrm{d}R}{r}\,,$$

$$E = \int_S \mathrm{d}E = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{R=0}^{a}\frac{R\,\mathrm{d}R}{r^3}k\,. \tag{10.3}$$

Slika 10.1.

Diferenciranjem relacije $r^2 = R^2 + z^2$ imamo

$$r\,\mathrm{d}r = R\,\mathrm{d}R \tag{10.4}$$

Na taj način, smenom $R\,\mathrm{d}R$ sa $r\,\mathrm{d}r$ u (10.3), dobijamo

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_{R=0}^{a}\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\sqrt{a^2+z^2}-|z|\right)\,, \tag{10.5}$$

$$E = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\int_{R=0}^{a}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}k = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\frac{z}{|z|}-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)k\,. \tag{10.6}$$

Preporuke čitaocu:
- Odrediti izraz za polje diferenciranjem izraza za potencijal.
- Pokazati da polje diska na z-osi za $|z| \gg a$ postaje polje tačkastog naelektrisanja $Q = \sigma\pi a^2$ smeštenog u centar diska.

11. Naelektrisanje Q ravnomerno je raspodeljeno u vakuumu po površi u obliku polusfere poluprečnika a. Izračunati potencijal i vektor jačine električnog polja u centru polusfere. (Polusferna površ je otvorena.) (*Z920131*)

REZULTAT:
Potencijal i vektor jačine električnog polja su

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}\,, \qquad E = -\frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a^2}k\,, \tag{11.1}$$

pri čemu je ort k usmeren ka tački polusfere jednako udaljenoj od svih tačaka na njenom obodu.

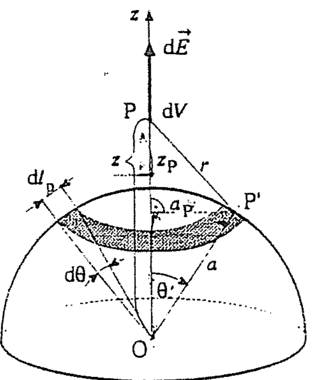
12. Polusferna površ, poluprečnika a, ravnomerno je naelektrisana naelektrisanjem površinske gustine σ. Sredina je vakuum. Izračunati potencijal i vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački na osi polusfere, normalnoj na ravan oboda polusfere.

REŠENJE:
Primenićemo sličan postupak kao u zadatku 10 i podeliti polusferu na tanke prstenove, poluprečnika $a_\mathrm{p} = a\sin\theta$ i širine $\mathrm{d}l_\mathrm{p} = a\,\mathrm{d}\theta$ (slika 12.1). Svaki takav prsten posmatraćemo kao kružnu nit, sa ukupnim naelektrisanjem

$$\mathrm{d}Q = \sigma\,\underbrace{2\pi a\sin\theta}_{O_\mathrm{p}}\,\underbrace{a\,\mathrm{d}\theta}_{\mathrm{d}l_\mathrm{p}}\,, \tag{12.1}$$

gde je O_p obim prstena, a $\mathrm{d}l_\mathrm{p}$ širina prstena.

Neka je tačka u kojoj je potrebno odrediti potencijal i polje, P, definisana koordinatom z. Odstojanje te tačke od tankog prstena čiji je položaj definisan uglom θ je, prema kosinusnoj teoremi,



Slika 12.1.

$$r = \sqrt{z^2+a^2-2az\cos\theta}\,. \tag{12.2}$$

Koristeći se izrazom za potencijal kružne niti (5.3), rezultantni potencijal u tački P je

$$V = \int_S \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{z^2+a^2-2az\cos\theta}}\,. \tag{12.3}$$

Uz smenu datu sa

$$u = z^2+a^2-2az\cos\theta\,, \qquad \mathrm{d}u = 2az\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,, \tag{12.4}$$

integral (12.3) se jednostavno rešava,

$$V = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 z}\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 z}\sqrt{u}\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\,. \tag{12.5}$$

Konačno, potencijal iznosi

$$V = \frac{\sigma a}{2\epsilon_0 z}\left(\sqrt{z^2+a^2}-|z-a|\right)\,. \tag{12.6}$$

Vektor jačine električnog polja u tački P ima samo z-komponentu, koja se, na osnovu potencijala datog gornjim izrazom, može odrediti kao

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0 z^2}\left(\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}+\frac{z-a}{|z-a|}\right)\,. \tag{12.7}$$

Polje se može odrediti i direktno, rešavanjem odgovarajućeg integrala polja. Polje elementarnog prstena je, prema izrazu (2.5),

$$dE_z = \frac{dQ(z - a\cos\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,, \tag{12.8}$$

gde je $z_p = z - a\cos\theta$ lokalna z-koordinata tačke P u odnosu na centar prstena, te je rezultantno polje

$$E_z = \frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(z - a\cos\theta)\sin\theta\, d\theta}{r^3}\,. \tag{12.9}$$

U svrhu rešavanja gornjeg integrala, uvešćemo smenu datu jednačinom (12.2). Na osnovu te jednačine, nije teško pokazati da važe sledeće relacije:

$$dr = \frac{az\sin\theta\, d\theta}{r}\,, \qquad \cos\theta = \frac{z^2 + a^2 - r^2}{2az}\,. \tag{12.10}$$

Uvrštavanjem izraza datih u jednačinama (12.2) i (12.10) u jednačinu (12.9), dobijamo

$$E_z = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0 z^2}\left[(z^2 - a^2)\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dr}{r^2} + \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} dr\right] =$$

$$\frac{\sigma a}{4\epsilon_0 z^2}\left[(z^2 - a^2)\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} + r\Big|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\right]\,, \tag{12.11}$$

što, nakon kraćeg sređivanja, daje izraz (12.7).

Proverimo, konačno, da li se rezultat ovoga zadatka u slučaju $z = 0$ svodi na rezultat zadatka 11. Za $z = 0$ izrazi dati u jednačinama (12.6) i (12.7) su oblika 0/0, tj. neodređeni su. Međutim, njihovom racionalizacijom dobijaju se sledeći izrazi:

$$V = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2} + |z - a|}\,, \tag{12.12}$$

$$E_z = -\frac{\sigma a^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}(a + \sqrt{z^2 + a^2})}\,, \quad \text{za } z < a\,, \tag{12.13}$$

za koje se lako pokazuje da se za $z = 0$, uz $\sigma = Q/(2\pi a^2)$, svode na izraze (11.1).

13. Površinsko naelektrisanje konstantne gustine σ raspodeljeno je u vakuumu po površi u obliku polovine vrlo dugačkog kružnog cilindra, poluprečnika a, kao što je prikazano na slici 13.1. U osi cilindra postavljeno je vlakno, ravnomerno naelektrisano naelektrisanjem podužne gustine $Q' = \pi\sigma a$. Izračunati vektor podužne sile koja deluje na vlakno. (*Z910122*)

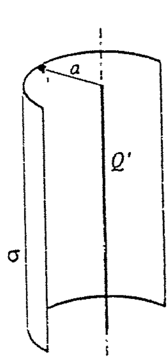
REŠENJE:
Podužna sila na vlakno se dobija po obrascu

$$F' = Q'E\,, \tag{13.1}$$

gde je E vektor jačine polja naelektrisanog polucilindra na njegovoj osi (tj. na mestu vlakna), u odsustvu naelektrisanog vlakna.

Polje polucilindra ćemo odrediti primenom principa superpozicije. Podelićemo polucilindar na elementarne, vrlo dugačke trake, širine dl. Polje svake takve trake aproksimiraćemo poljem vrlo dugačkog ravnomerno naelektrisanog vlakna, postavljenog u osu trake. Podužna gustina naelektrisanja ekvivalentnog vlakna je $dQ' = \sigma\, dl$ (zato što naelektrisanje elementarne trake dužine h, $\sigma h\, dl$, mora biti jednako naelektrisanju ekvivalentnog vlakna iste dužine, $dQ'h$). Vektor jačine polja ekvivalentnog vlakna radijalan je u odnosu na osu vlakna, a intenzitet toga vektora na osi polucilindra (slika 13.2) je

$$dE = \frac{\sigma\, dl}{2\pi\epsilon_0 a}\,. \tag{13.2}$$



Slika 13.1.

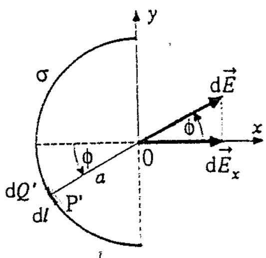
Zbog simetrije, rezultantno polje ima samo x-komponentu, koja iznosi

$$E_x = \int_l dE_x = \int_l dE\cos\phi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi\, d\phi = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0}\,, \tag{13.3}$$

pri čemu je l kontura poprečnog preseka polucilindra i upotrebljena je relacija $dl = a\, d\phi$.

Konačno, na osnovu jednačina (13.1) i (13.3), podužna sila na vlakno u osi polucilindra je

$$F' = \frac{Q'\sigma}{\pi\epsilon_0}\, i = \frac{\sigma^2 a}{\epsilon_0}\, i\,. \tag{13.4}$$



Slika 13.2.

Na osnovu zakona akcije i reakcije, podužna sila koja deluje na polucilindar je suprotna. Izraz za tu silu može se dobiti i direktno, kao

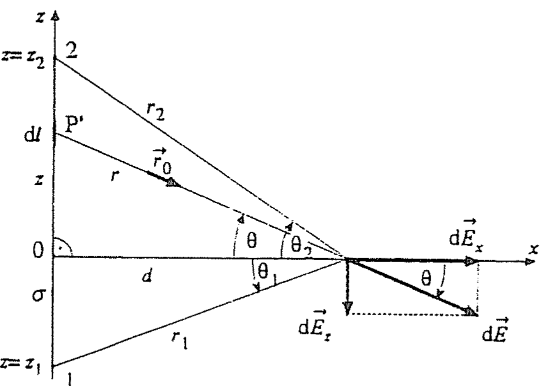
$$F'_{\text{na polucilindar}} = \int_l (dF')_{\text{na elementarnu traku}} =$$

$$\int_l \underbrace{\sigma\, dl}_{dQ'}\, E_{\text{vlakna}}\,. \tag{13.5}$$

14. Veoma tanka, vrlo dugačka, ravna traka, širine a, ravnomerno je naelektrisana naelektrisanjem površinske gustine σ. Traka se nalazi u vakuumu. Izračunati vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački prostora.

REŠENJE:
Problem je cilindričan dvodimenzioni i treba ga rešavati u ravni poprečnog preseka. Na slici 14.1 skiciran je poprečni presek trake i ucrtana tačka (P) u kojoj treba

izračunati polje. Geometrija problema je određena uglovima θ_1 i θ_2 i odstojanjem d. (Zapaziti da je slika identična slici 7.1 uz određivanje polja pravolinijske niti ograničene dužine, ali je u pitanju drugačija geometrija.)



Slika 14.1.

Podelićemo traku na elementarne trake, širine $dl = dz$, i elementarno polje izračunati kao u zadatku 13. Ovde je

$$dE = \frac{\sigma\, dz}{2\pi\epsilon_0 r} r_0\,, \quad r = \sqrt{z^2 + d^2}\,. \tag{14.1}$$

Vektor dE razlažemo na x- i z-komponentu, kao u (7.2). Superpozicijom je:

$$E_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\cos\theta\, dz}{r}\,, \quad E_z = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\sin\theta\, dz}{r}\,, \tag{14.2}$$

gde je l kontura poprečnog preseka trake. Polazeći od relacija (7.3), nije teško izvesti sledeće relacije:

$$\frac{\cos\theta\, dz}{r} = d\theta\,, \quad \frac{\sin\theta\, dz}{r} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} d\theta\,, \tag{14.3}$$

na osnovu kojih se integrali (14.2) jednostavno rešavaju,

$$E_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} (\theta_2 - \theta_1)\,, \tag{14.4}$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d(\cos\theta)}{\cos\theta} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln\frac{r_1}{r_2}\,, \tag{14.5}$$

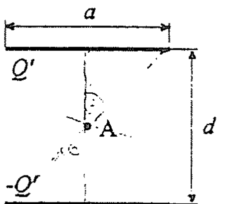
pa je

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left[(\theta_2 - \theta_1)\, i + k \ln\frac{r_1}{r_2} \right]. \tag{14.6}$$

U gornjim izrazima, r_1 i r_2 su odstojanja tačke P od odgovarajućih temena duži koja predstavlja poprečni presek naelektrisane trake.

Zadatak se može rešiti i integracijom po koordinati z, što se ostavlja čitaocu za vežbu.

15. Dve paralelne, tanke, dugačke trake ravnomerno su naelektrisane po svojim sučeljenim površima naelektrisanjima podužnih gustina Q', odnosno $-Q'$. Poprečni presek traka prikazan je na slici 15.1. Širine traka jednake su odstojanju između traka ($a = d$), a sredina je vazduh. Odrediti vektor jačine električnog polja u središtu poprečnog preseka (tački A). (*Z941126*)



Slika 15.1.

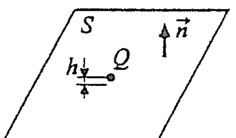
REZULTAT:
Na osnovu rešenja zadatka 14, primenom superpozicije se lako dobija: $E = Q' i_E / (2\epsilon_0 a)$, gde je i_E ort normalan na trake, usmeren ka donjoj traci.

16. Naelektrisana čestica, mase m i naelektrisanja Q, kreće se u električnom polju samo pod dejstvom električne sile. U trenutku t_1 čestica se nalazi u tački A u kojoj je potencijal V_1, a brzina čestice v_1. U trenutku t_2 čestica se nalazi u tački B u kojoj je potencijal V_2. Kolika je brzina čestice u tački B, v_2? (*P950903*)

REZULTAT:
Izraz za brzinu čestice u tački B je

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2Q(V_1 - V_2)}{m}}\,. \tag{16.1}$$

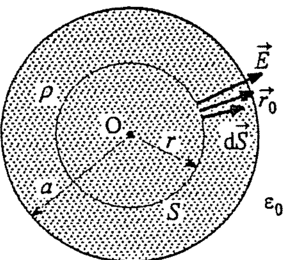
17. Tačkasto naelektrisanje Q nalazi se u vakuumu na maloj visini h iznad velike zamišljene ravne površi S, kao što je prikazano na slici 17.1. Površ je orijentisana nagore. (a) Pod kolikim se prostornim uglom vidi površ S gledano iz tačkastog naelektrisanja Q? (b) Koliki je fluks vektora jačine električnog polja koje potiče od ovog naelektrisanja kroz površ S? (*P950924*)



Slika 17.1.

REZULTAT:
(a) Traženi prostorni ugao je $\Omega = -2\pi$ (po modulu, polovina punog prostornog ugla); (b) Fluks vektora E kroz površ S iznosi $\Psi_E = -Q/(2\epsilon_0)$.

18. Naelektrisanje Q ravnomerno je raspodeljeno u vakuumu po zapremini sfere, poluprečnika a. Koliki je potencijal na površi i u centru sfere? (*P920403*)



Slika 18.1.

REŠENJE:
Gustina zapreminskog naelektrisanja sfere je

$$\rho = \frac{Q}{v_{\text{sfere}}} = \frac{3Q}{4\pi a^3} . \tag{18.1}$$

Zbog simetrije, vektor jačine električnog polja je radijalan i intenzitet mu zavisi samo od radijalne koordinate, tj.

$$\boldsymbol{E} = E(r)\,\boldsymbol{r}_0 , \tag{18.2}$$

gde je sa $\boldsymbol{r}_0$ označen radijalan ort (slika 18.1).

Izlazni fluks vektora $\boldsymbol{E}$ kroz sfernu površ S poluprečnika r je

$$\Psi_E = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S E\boldsymbol{r}_0 \cdot \mathrm{d}S\boldsymbol{r}_0 = E \oint_S \mathrm{d}S = ES = E 4\pi r^2 , \quad 0 \le r < \infty , \tag{18.3}$$

a naelektrisanje obuhvaćeno tom površi iznosi

$$Q_S = \begin{cases} \rho 4\pi r^3/3 & \text{za } r < a \\ Q & \text{za } r \ge a \end{cases} \tag{18.4}$$

Prema Gausovom zakonu (1.2) je $\Psi_E = Q_S/\epsilon_0$, odakle sledi

$$E = \begin{cases} \rho r/(3\epsilon_0) & \text{za } r < a \\ Q/(4\pi\epsilon_0 r^2) & \text{za } r \ge a \end{cases} \tag{18.5}$$

Očigledno, polje van sfere identično je polju tačkastog naelektrisanja Q koncentrisanog u centru sfere, te isto važi i za potencijal.[1] Stoga je potencijal površi sfere

$$V(a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} . \tag{18.6}$$

Konačno, potencijal centra sfere se dobija kao

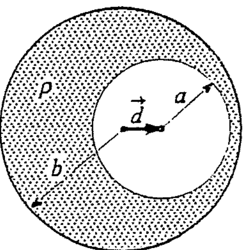
$$V(0) = \int_0^a E\,\mathrm{d}r + V(a) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} . \tag{18.7}$$

[1] Ukoliko se u tekstu zadatka ništa ne naglasi, podrazumeva se referentna tačka potencijala u beskonačnosti.

19. Naelektrisanje konstantne gustine ρ ravnomerno je raspodeljeno u vakuumu po zapremini sfere sa ekscentričnom sfernom šupljinom prikazane na slici 19.1. Šupljina je sfernog oblika, poluprečnika a, a njen centar je pomeren u odnosu na centar sfere, čiji je poluprečnik b, za vektor $\boldsymbol{d}$ $(a + d \le b)$. Izračunati vektor jačine električnog polja u šupljini.

REŠENJE:
Gustina naelektrisanja sa slike 19.1 jednaka je (u svakoj tački) zbiru gustina naelektrisanja u odgovarajućim tačkama sistema prikazanih na slici 19.2. Po principu superpozicije, polje originalne (rezultantne) raspodele naelektrisanja, $\boldsymbol{E}$, može se dobiti kao

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 , \tag{19.1}$$



Slika 19.1.

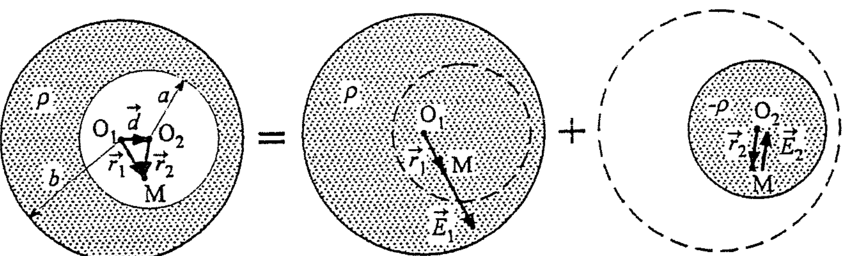
gde su $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{E}_2$ polja parcijalnih raspodela naelektrisanja, sa slike 19.2, koja, prema izrazima (18.2) i (18.5), mogu da se napišu u obliku

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\boldsymbol{r}_1 , \qquad \boldsymbol{E}_2 = \frac{-\rho}{3\epsilon_0}\boldsymbol{r}_2 , \tag{19.2}$$

gde su $\boldsymbol{r}_1$ i $\boldsymbol{r}_2$ vektori položaja tačke u kojoj računamo polje (M) u odnosu na centre sfere i šupljine, respektivno. Konačno, kombinovanjem gornjih jednačina, dobijamo

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\boldsymbol{d} . \tag{19.3}$$

Očigledno, polje unutar šupljine je homogeno, jer u gornjem izrazu za vektor jačine rezultantnog polja ne figuriše položaj tačke M.



Slika 19.2.

20. U sferi poluprečnika a, u vakuumu, raspodeljeno je naelektrisanje gustine $\rho(r) = \rho_0 r/a$, gde je r odstojanje od centra sfere, a ρ_0 konstanta. Izračunati potencijal centra sfere u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti. (*P960925*)

REŠENJE:
Izdelimo sferu na elementarne sferne slojeve (ljuske) debljine dr. Uočimo ljusku poluprečnika r. Zapremina te ljuske je $dv = 4\pi r^2 dr$ (površina sloja pomnožena debljinom sloja), a naelektrisanje je $dQ = \rho dv$. Odgovarajući potencijal dV u centru ljuske jednak je potencijalu na njenoj površi, jer unutar ljuske nema polja, dakle, $dV = dQ/(4\pi\epsilon_0 r)$. Konačno, rezultantni potencijal u centru sfere je

$$V = \int_0^a dV = \int_0^a \frac{\rho_0 r^2 dr}{\epsilon_0 a} = \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}. \tag{20.1}$$

Primenom opisanog postupka može se rešiti i zadatak 18, što se ostavlja čitaocu za vežbu.

21. Odrediti vektor jačine električnog polja naelektrisanja konstantne gustine ρ raspodeljenog, u vakuumu, po zapremini beskonačno dugačkog cilindra, poluprečnika a. (*P930221*)

REZULTAT:
Izrazi za jačinu električnog polja su $E = \rho r/(2\epsilon_0)$, za $r \leq a$, i $E = \rho a^2/(2\epsilon_0 r)$, za $r > a$, gde je r odstojanje tačke u kojoj se određuje polje od ose cilindra.

22. Naelektrisanje konstantne gustine ρ ravnomerno je raspodeljeno u vakuumu po zapremini šupljeg, beskonačno dugačkog cilindra, čiji je poprečni presek identičan preseku sfere sa slike 19.1. Šupljina je cilindričnog oblika, poluprečnika a, a njena osa je pomerena u odnosu na osu cilindra, čiji je poluprečnik b, za vektor d $(a + d \leq b)$. Izračunati vektor jačine električnog polja u šupljini.

REZULTAT:
Električno polje je homogeno, jačine $E = \rho d/(2\epsilon_0)$.

23. Beskonačno dugačak cilindar, poluprečnika a, naelektrisan je po svojoj zapremini tako da je gustina naelektrisanja data izrazom $\rho(r) = \rho_0 r/a$, gde je ρ_0 konstanta, a r odstojanje od ose cilindra. Sredina je vakuum. Izračunati vektor jačine električnog polja u cilindru i izvan njega. (*Z850309*)

REŠENJE:
Na slici 23.1 prikazan je poprečni presek cilindra. Zbog simetrije, polje je radijalno, oblika datog u (18.2), pri čemu je r radijalna cilindrična koordinata (u odnosu na osu cilindra), a r_0 odgovarajući ort. Primenom Gausovog zakona na zatvorenu površ S_G u obliku valjka, poluprečnika r $(r \leq a)$ i visine h, postavljenog koaksijalno u odnosu na cilindar, dobijamo

$$E \underbrace{2\pi r h}_{S_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \underbrace{\rho_0 \frac{R}{a}}_{\rho} \underbrace{2\pi R \, dR h}_{dv}, \tag{23.1}$$

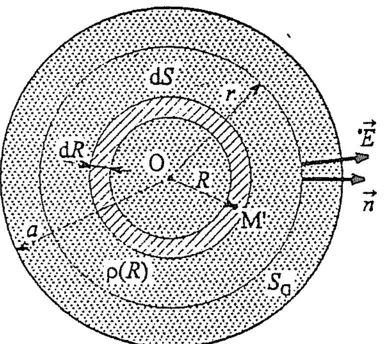
gde je sa S_0 označena površina omotača valjka, dok je dv zapremina tankog kružnog šupljeg cilindra, poluprečnika R, debljine dR i visine h, čiji je poprečni presek, površine dS, šrafiran na slici 23.1. Fluks vektora E kroz bazise valjka jednak je nuli. Nakon obavljene integracije dobija se

$$E = \frac{\rho_0 r^2}{3\epsilon_0 a}, \quad \text{za } r \leq a. \tag{23.2}$$

U slučaju $r > a$, gornja granica integrala u jednačini (23.1) je a, što rezultuje izrazom

$$E = \frac{\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r}, \quad \text{za } r > a. \tag{23.3}$$

Polje van cilindra identično je polju niti smeštene u osu cilindra, ravnomerno naelektrisane naelektrisanjem iste podužne gustine gustine Q' kao cilindar.



Slika 23.1.

Napomena: Pri rešavanju zapreminskih integrala, $\int_v f \, dv$, povoljno je usvojiti što je moguće veći element zapremine dv, a da pri tome bude zadovoljeno $f = \text{const}$ u dv. Po istom principu se usvaja element dS kod integracije površinskih interala.

24. Gustina zapreminski raspodeljenog naelektrisanja u vakuumu zavisi samo od Dekartove koordinate x: $\rho(x) = \rho_0(1 - x^2/a^2)$, $|x| \leq a$, $\rho(x) = 0$, $|x| > a$, gde su ρ_0 i a $(a > 0)$ konstante. Odrediti vektor jačine električnog polja za $-\infty < x < \infty$.

REŠENJE:
Na slici 24.1 prikazana je zadata raspodela naelektrisanja. Zbog ravanske simetrije, vektor jačine električnog polja, E, u proizvoljnoj tački prostora ima samo x-komponentu, koja se ne menja u proizvoljnoj ravni $x = \text{const}$. Pošto se radi o raspodeli naelektrisanja simetričnoj u odnosu na ravan $x = 0$, vektor E u ravni sa koordinatom $-x_0$ suprotan je vektoru E u ravni sa koordinatom x_0.

Polje se može odrediti primenom Gausovog zakona i u tu svrhu zatvorenu površ treba usvojiti u obliku pravog cilindra, površine bazisa S, postavljenog simetrično u odnosu na ravan $x = 0$. Neka je desni bazis cilindra u ravni definisanoj koordinatom x_0, pri čemu je $0 \leq x_0 \leq a$. Tako imamo

$$2ES = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{-x_0}^{x_0} \rho(x) S \, dx, \tag{24.1}$$

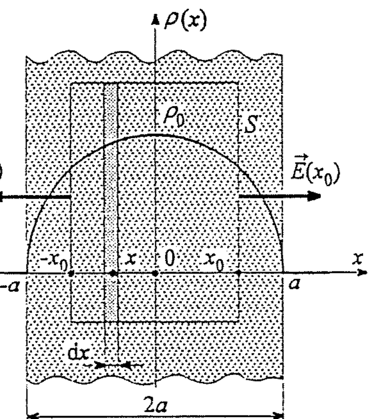
gde je $dv = S \, dx$ zapremina tankog cilindra, površine bazisa S i debljine dx, čiji je presek šrafiran na slici 24.1. Fluks vektora E kroz omotač cilindra je nula.

Integracijom dobijamo

$$E = \frac{\rho_0 x_0}{\epsilon_0}\left(1 - \frac{x_0^2}{3a^2}\right), \qquad \text{za } |x_0| \le a. \tag{24.2}$$

Izvucimo bazise cilindra na granice sloja naelektrisanja. Ako sada krenemo da ih pomeramo ka beskonačnosti (simetrično u odnosu na ravan $x = 0$), ništa se, u pogledu primene Gausovog zakona, neće menjati. Stoga je $E(\pm x_0) = E(\pm a)$, za $|x_0| > a$, tj.

$$E = \frac{2\rho_0 a}{3\epsilon_0}, \qquad \text{za } |x_0| > a. \tag{24.3}$$



Slika 24.1.

25. U vakuumu postoji zapreminski raspodeljeno naelektrisanje, čija gustina zavisi samo od Dekartove koordinate x i data je izrazom $\rho(x) = \rho_0 x/a$, $|x| < a$, $\rho(x) = 0$, $|x| \ge a$, gde su ρ_0 i a ($a > 0$) konstante. Odrediti vektor jačine električnog polja ovoga naelektrisanja, kao i razliku potencijala tačke A, za koju je $x = -a$, i tačke B, za koju je $x = a$. (Z900124)

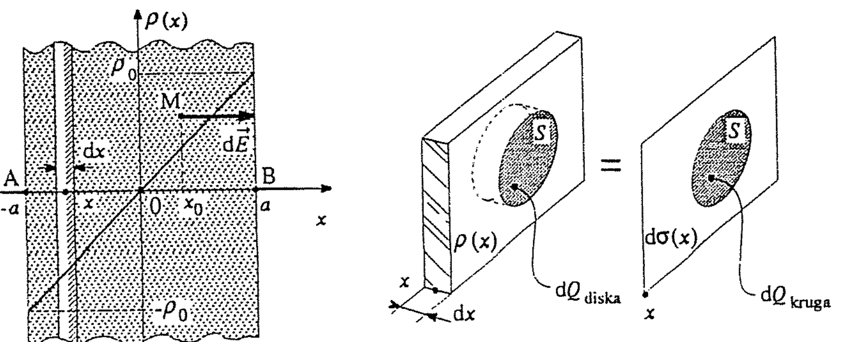
REŠENJE:
Na slici 25.1 prikazana je zadata raspodela naelektrisanja. Zapazimo da je raspodela naelektrisanja antisimetrična u odnosu na ravan $x = 0$. Neka je položaj tačke M, odnosno ravni, u kojoj je potrebno odrediti polje definisan koordinatom x_0. Pretpostavimo, najpre, da je $|x_0| < a$.

Izdelimo dati sloj naelektrisanja na tanke ravne slojeve, debljine $\mathrm{d}x$. Uočimo sloj čiji je položaj definisan koordinatom x. Polje takvog sloja, $\mathrm{d}E$, možemo aproksimirati poljem ravnog uniformnog plašta naelektrisanja (ravnomerno naelektrisane ravni), sa odgovarajućom gustinom površinskog naelektrisanja, $\mathrm{d}\sigma$. Prema slici 25.2,

$$\mathrm{d}Q_{\text{diska}} = \rho S\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}Q_{\text{kruga}} = \mathrm{d}\sigma S, \qquad \mathrm{d}Q_{\text{diska}} = \mathrm{d}Q_{\text{kruga}}, \tag{25.1}$$

gde je $S\,\mathrm{d}x$ zapremina diska površine bazisa S i debljine $\mathrm{d}x$. Na osnovu gornjih jednačina, $\mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}x$, pa je algebarski intenzitet polja elementarnog sloja u odnosu na referentni smer od sloja upolje

$$\mathrm{d}E = \frac{\rho\,\mathrm{d}x}{2\epsilon_0}. \tag{25.2}$$



Slika 25.1. Slika 25.2.

Primenom principa superpozicije, rezultantno polje u tački M se dobija kao

$$E_x = \int_{x=-a}^{a} \mathrm{d}E_x = \frac{1}{2\epsilon_0}\left[\int_{-a}^{x_0} \rho(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{a} \rho(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 a}\left(\int_{-a}^{x_0} x\,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{a} x\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0 a}(x_0^2 - a^2), \qquad \text{za } |x_0| < a. \tag{25.3}$$

Za $|x_0| \ge a$ imamo

$$E_x = -\frac{1}{2\epsilon_0}\int_{-a}^{a} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (x_0 \le -a), \qquad E_x = \frac{1}{2\epsilon_0}\int_{-a}^{a} \rho(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad (x_0 \ge a). \tag{25.4}$$

Traženi napon iznosi

$$U_{\text{AB}} = \int_{x_0=-a}^{a} E_x\,\mathrm{d}x_0 = -\frac{2\rho_0 a^2}{3\epsilon_0}. \tag{25.5}$$

Zadatak se može rešiti i na drugi način, direktnom primenom Gausovog zakona. Uočimo, najpre, da je zbog ravanske simetrije problema vektor jačine električnog polja u čitavom prostoru oblika

$$E = E_x(x)\,i. \tag{25.6}$$

Kako je raspodela naelektrisanja sloja antisimetrična, to je polje van sloja nula [videti (25.4)]. Zamislimo cilindar čiji su bazisi, površine S, paralelni sloju. Pri tome, neka je levi bazis levo od sloja, a desni u sloju, u ravni definisanoj koordinatom x_0 ($|x_0| \le a$). Prema Gausovom zakonu, primenjenom na površ cilindra, imamo

$$E_x(x_0)S = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{-a}^{x_0} \rho(x)S\,\mathrm{d}x, \qquad \text{za } |x_0| \le a, \tag{25.7}$$

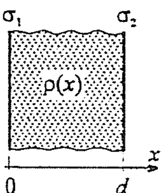
što, nakon obavljene integracije, daje isti rezultat kao u (25.3).

26. Gustina prostorno raspodeljenog naelektrisanja u vakuumu zavisi samo od Dekartove koordinate x i data je izrazom $\rho(x) = ae^{bx}$, $x < 0$; $\rho(0) = 0$; $\rho(x) = -ae^{-bx}$, $x > 0$, gde su a i b pozitivne konstante. Odrediti izraz za vektor jačine električnog polja ovoga naelektrisanja u proizvoljnoj tački prostora.

REZULTAT:

Označavajući sa x_0 koordinatu tačke u kojoj se određuje vektor jačine električnog polja, ima se: $E(x_0) = a\,e^{-b|x_0|}\,i/(\epsilon_0 b)$, $-\infty < x_0 < \infty$.

27. Rastojanje elektroda pločastog kondenzatora prikazanog na slici 27.1 je d, a sredina je vakuum. Između elektroda postoji oblak elektrona poznate zapreminske gustine naelektrisanja $\rho(x) = \rho_0(x/d)^{-2/3}$, $0 < x < d$, gde je ρ_0 ($\rho_0 < 0$) konstanta. Površinska gustina naelektrisanja leve elektrode je $\sigma_1 = 0$. (a) Odrediti površinsku gustinu naelektrisanja desne elektrode (σ_2) tako da jačina električnog polja izvan kondenzatora bude jednaka nuli. (b) Koliki je pri tome napon između elektroda U_{21}? Zanemariti ivične efekte. (*Z960618*)



Slika 27.1.

REZULTAT:

Izrazi za tražene veličine su: (a) $\sigma_2 = -3\rho_0 d$ i (b) $U_{21} = -9\rho_0 d^2/(4\epsilon_0)$.

28. Naelektrisanje metalne lopte, poluprečnika a, je Q. Koncentrično sa ovom loptom postavljena je šuplja nenaelektrisana metalna lopta, unutrašnjeg poluprečnika b i spoljašnjeg poluprečnika c ($a < b < c$). Odrediti izraz za potencijal centra u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti. Sredina je svuda vakuum.

REŠENJE:

Kao rezultat elektrostatičke indukcije, na površima šuplje lopte postoji indukovano naelektrisanje. U metalu, u elektrostatičkom polju, nema zapreminskog naelektrisanja. Obeležimo sa Q_b i Q_c indukovano naelektrisanje na unutrašnjoj i spoljašnjoj površi šuplje lopte, respektivno. Iz Gausovog zakona, primenjenog na površ koja se čitava nalazi u metalu šuplje lopte, u kome nema polja, sledi $Q_b = -Q$. Na drugoj strani, po uslovu zadatka, šuplja lopta je nenaelektrisana, pa je $Q_c = -Q_b = Q$. Zbog simetrije, na pojedinim površima metala naelektrisanje se raspodeljuje ravnomerno, a električno polje u čitavom prostoru izvan metala je radijalno i zavisi samo od radijalne koordinate (odstojanja od centra), r. Raspodele naelektrisanja i polja, pod pretpostavkom $Q > 0$, skicirane su na slici 28.1.

Na osnovu Gausovog zakona, polje u prostoru izvan metala iznosi

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{(u vakuumu)}\,, \tag{28.1}$$

dok je za $0 \le r \le a$, odnosno $b \le r \le c$,

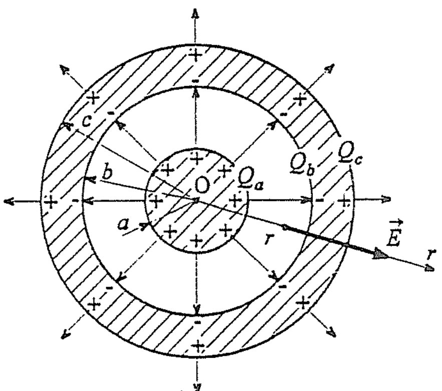
$$E(r) = 0 \quad \text{(u metalu)}\,. \tag{28.2}$$

Traženi potencijal centra (tačke O) u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti je

$$V = \int_0^\infty E(r)dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\int_a^b \frac{dr}{r^2} + \int_b^\infty \frac{dr}{r^2}\right) =$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{Q(bc - ac + ab)}{4\pi\epsilon_0 abc}\,. \tag{28.3}$$

Sistem sa slike 28.1 može se predstaviti i ekvivalentnom šemom prikazanom na slici 28.2. C_{ab} i C_{cd} su kapacitivnosti vazdušnih sferičnih kondenzatora, poluprečnika elektroda a i b, odnosno c i d, pri čemu $d \to \infty$ (spoljašnja elektroda drugog kondenzatora je u beskonačnosti). Očigledno, opterećenosti oba kondenzatora su Q. Prema slici 28.2,



Slika 28.1.

$$V = U_{ad} = U_{ab} + U_{cd} = \frac{Q}{C_{ab}} + \frac{Q}{C_{cd}}$$

$$= Q\frac{C_{ab} + C_{cd}}{C_{ab}C_{cd}}\,, \tag{28.4}$$

što, zamenom formule za kapacitivnost vazdušnog sferičnog kondenzatora, rezultuje izrazom (28.3).

Naravno,

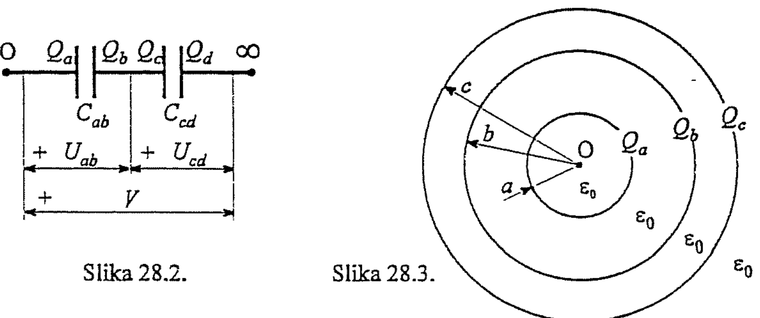
$$V = \frac{Q}{C_e}\,, \tag{28.5}$$

gde je C_e kapacitivnost redne veze kondenzatora sa slike 28.2.

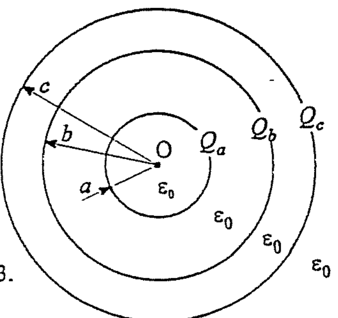
Sistem sa slike 28.1, može se, konačno, ekvivalentirati i sa tri sferna plašta naelektrisanja *u vakuumu*, kao na slici 28.3. Kako je potencijal u centru sferne površi, poluprečnika r, naelektrisane naelektrisanjem Q, dat izrazom $Q/(4\pi\epsilon_0 r)$, to, superpozicijom potencijala pojedinih plašteva, imamo

$$V = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q_b}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 c}\,, \tag{28.6}$$

što, opet, dovodi do rezultata datog izrazom (28.3).

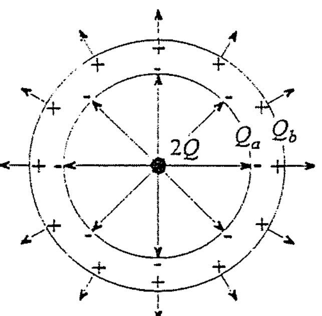


Slika 28.2.



Slika 28.3.

29. Naelektrisanje šuplje metalne lopte je Q, a u centru lopte nalazi se tačkasto naelektrisanje $2Q$. (a) Skicirati raspodelu naelektrisanja na unutrašnjem i spoljašnjem zidu lopte. (b) Koliko je ukupno naelektrisanje na unutrašnjem, a koliko na spoljašnjem zidu? (c) Skicirati raspodelu naelektrisanja lopte ako se ona uzemlji sa spoljašnje strane. (*P921025*)



Slika 29.1.

REŠENJE:

(a) Tražena raspodela naelektrisanja (i polja) je skicirana na slici 29.1.

(b) Ukupna naelektrisanja na unutrašnjem i spoljašnjem zidu lopte su $Q_a = -2Q$ i $Q_b = 3Q$, respektivno.

(c) Kada se lopta uzemlji, naelektrisanje sa spoljašnjeg zida lopte oteći će kroz uzemljenje, pa je $Q_b = 0$. U novom stacionarnom stanju, polje van lopte ne postoji. Na unutrašnjem zidu lopte, međutim, kao i u prostoru unutar lopte, sve ostaje nepromenjeno.

30. Tri šuplje metalne lopte postavljene su koncentrično. Spoljašnji poluprečnik unutrašnje lopte je $a = 20$ mm, a naelektrisanje $Q = 15$ nC. Unutrašnji poluprečnik srednje lopte je $b = 50$ mm, spoljašnji je $c = 55$ mm, a potencijal je $V = 1$ kV u odnosu na beskonačno daleke tačke. Unutrašnji poluprečnik spoljašnje lopte je $d = 100$ mm, spoljašnji je $e = 105$ mm, a ova lopta je nenaelektrisana. Prostor između unutrašnje i srednje lopte ispunjen je homogenim dielektrikom relativne permitivnosti $\epsilon_{r1} = 3$, prostor između srednje i spoljašnje lopte ispunjen je homogenim dielektrikom relativne permitivnosti $\epsilon_{r2} = 4,5$, a u ostatku prostora dielektrik je vazduh. Izračunati napon između unutrašnje i spoljašnje lopte. (*Z950619*)

REŠENJE:

Neka je Q_1 naelektrisanje srednje lopte. Polje je radijalno, a, na osnovu uopštenog

Gausovog zakona, intenzitet polja u tački van provodnika, na odstojanju r od centra lopti, iznosi

$$E_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 r^2} \quad (a < r < b), \qquad E_2 = \frac{Q+Q_1}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0 r^2} \quad (c < r < d),$$

$$E_3 = \frac{Q+Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > e). \qquad V = V_2 + V_3 \tag{30.1}$$

Sada je potencijal srednje lopte

$$V = \frac{Q+Q_1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{d-c}{\epsilon_{r2}cd} + \frac{1}{e}\right), \; = V_2 + V_3 \tag{30.2}$$

odakle je $Q_1 = -5,19$ nC. Konačno, traženi napon između unutrašnje i spoljašnje lopte iznosi

$$U_{ad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q(b-a)}{\epsilon_{r1}ab} + \frac{(Q+Q_1)(d-c)}{\epsilon_{r2}cd}\right] = 1,51 \text{ kV}. \tag{30.3}$$

Preporučuje se čitaocu da reši zadatak i koristeći se ekvivalentnom šemom sa rednom vezom (tri) kondenzatora.

31. Na slici 31.1 je prikazan poprečni presek sistema koji se sastoji od tri koncentrična sferična provodnika (unutrašnji provodnik je puna sfera, a preostala dva šuplje sfere). Poluprečnik unutrašnjeg provodnika je $a = 1$ mm. Unutrašnji poluprečnik središnjeg provodnika je $b = 2$ mm, a spoljašnji $c = 2,5$ mm. Unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika je $d = 5$ mm. Prostor između provodnika je ispunjen linearnim homogenim dielektrikom, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 4$. Spoljašnji provodnik je uzemljen. Potencijali unutrašnjeg i središnjeg provodnika prema spoljašnjem provodniku su $V_1 = 3$ V i $V_2 = 2$ V, respektivno. Izračunati ukupna naelektrisanja unutrašnjeg i središnjeg provodnika, Q_1 i Q_2. (*Z960404*)

REZULTAT: $V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{b-a}{ab}\right) + \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{d-c}{dc}\right)$

Tražena naelektrisanja su $Q_1 = 0,89$ pC i $Q_2 = 3,56$ pC.

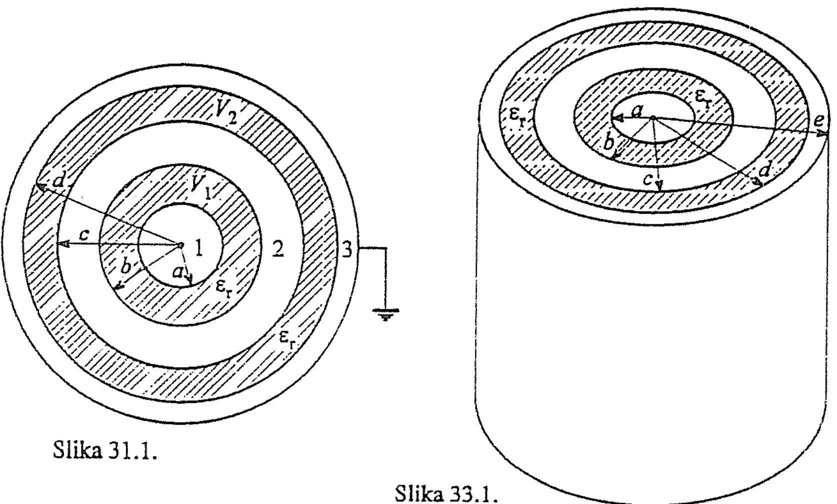
$V_2 = \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{d-c}{dc}\right)$

32. Metalna lopta, poluprečnika $a = 5$ cm, okružena je sa dvema koncentričnim metalnim ljuskama, poluprečnika $b = 10$ cm i $c = 15$ cm, odnosno $d = 20$ cm i $e = 25$ cm. Relativna permitivnost dielektrika između lopte i prve ljuske, kao i između dve ljuske je $\epsilon_r = 4$. Izvan spoljašnje ljuske je vazduh. Naelektrisanje lopte je $Q_1 = 1$ nC, a naelektrisanje spoljašnje ljuske je $Q_3 = -1$ nC. (a) Koliko je naelektrisanje unutrašnje ljuske (Q_2) ako su potencijali lopte i spoljašnje ljuske (u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti) jednaki ($V_1 = V_3$)? (b) Koliki su pri tome potencijali lopte i ljuski? (*Z910920*)

REZULTAT: $V_1 = V + V_2 + V_3$

Tražene veličine iznose: (a) $Q_2 = -7$ nC, (b) $V_1 = V_3 = -251,6$ V i $V_2 = -274,2$ V.

$V = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \qquad V_3 = \frac{Q_1+Q_2+Q_3}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot e}$



Slika 31.1.

Slika 33.1.

(33.) Na slici 33.1 je prikazan detalj triaksijalnog kabla, koji se sastoji od tri koaksijalna cilindrična veoma dugačka provodnika. Poluprečnici provodnika su $a = 1$ mm, $b = 2$ mm, $c = 2,5$ mm, $d = 5$ mm i $e = 5,5$ mm. Dielektrik kabla je homogen, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 4$. Spoljašnji provodnik kabla je uzemljen. Unutrašnji provodnik i središnji provodnik su opterećeni, tako da su im potencijali prema spoljašnjem provodniku $V_1 = 3$ V i $V_2 = 2$ V, respektivno. Izračunati podužna naelektrisanja unutrašnjeg i središnjeg provodnika, Q_1' i Q_2'. (*Z960302*)

REZULTAT:
Podužne gustine naelektrisanja provodnika ovoga kabla su $Q_1' = Q_2' = 321$ pC/m.

34. Četiri velike ravne metalne elektrode, svaka površine $S = 1$ m^2 i debljine $d = 1$ mm, postavljene su u vakuumu paralelno jedna drugoj na međusobnom odstojanju d, kao što je prikazano na slici 34.1. Prva i četvrta elektroda su uzemljene, naelektrisanje druge elektrode je $Q = -17,71$ μC, a potencijal treće elektrode (u odnosu na zemlju) je $V = 1$ kV. Izračunati električnu energiju ovog sistema. Zanemariti ivične efekte. (*Z930921*)

REŠENJE:
Ako se zanemare ivični efekti, električno polje postoji samo u prostorima između elektroda, vektor $\mathbf{E}$ je normalan na elektrode, polje je homogeno i raspodela naelektrisanja na zidovima elektroda ravnomerna. Naelektrisanja na naspramnim stranama susednih elektroda moraju biti suprotna, kao što je označeno na slici 34.2

Potencijal treće elektrode u odnosu na zemlju, koji je po uslovu zadatka V, može se izraziti preko cirkulacije polja nalevo, do prve elektrode, koja je uzemljena, ili cirkulacijom polja nadesno, do četvrte elektrode, koja je takođe uzemljena. Tako,

imamo

$$V = -E_1 d - E_2 d\,, \qquad (34.1)$$

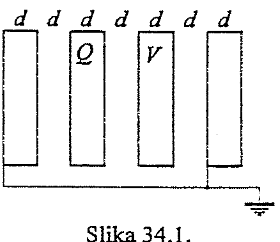
$$V = E_3 d\,. \qquad (34.2)$$

Iz poslednje jednačine, $E_3 = V/d = 1$ MV/m.

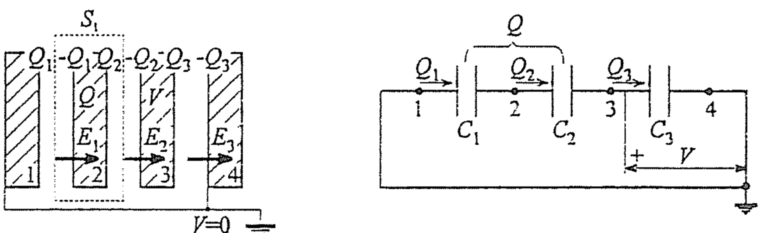
Primenom Gausovog zakona na zatvorenu cilindričnu površ S_1, koja obuhvata drugu elektrodu, dobijamo

$$-E_1 + E_2 = \frac{Q}{\epsilon_0 S}\,, \qquad (34.3)$$

gde je Q naelektrisanje druge elektrode, dato tekstom zadatka. Rešenje sistema koji čine jednačine (34.1) i (34.3) je $E_1 = 0,5$ MV/m i $E_2 = -1,5$ MV/m.



Slika 34.1.



Slika 34.2.

Slika 34.3.

Električna energija sistema (sadržana u prostorima između metalnih elektroda) je

$$W_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(E_1^2 + E_2^2 + E_3^2\right) Sd = 15,5 \text{ mJ}\,. \qquad (34.4)$$

Zadatak se može rešiti i koristeći se električnim kolom prikazanim na slici 34.3, koje je ekvivalentno sistemu sa slike 34.2. Kondenzatori su pločasti, kapacitivnosti

$$C_1 = C_2 = C_3 = C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = 8,85 \text{ nC}\,, \qquad (34.5)$$

pri čemu su zanemareni ivični efekti.

Jednačine za kolo, po opterećenostima kondenzatora, su

$$-\frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2} - V = 0\,, \qquad -\frac{Q_3}{C_3} + V = 0\,, \qquad -Q_1 + Q_2 = Q\,, \qquad (34.6)$$

a njihovo rešenje je $Q_1 = 4,43$ μC, $Q_2 = -13,28$ μC i $Q_3 = 8,85$ μC.

Energija sistema je jednaka zbiru energija pojedinih kondenzatora, pa je

$$W_e = \frac{1}{2C}\left(Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2\right) = 15,5 \text{ mJ}\,. \qquad (34.7)$$

35. Elektrode pločastog kondenzatora su kvadratne, stranice a, odstojanje između njih je d ($d \ll a$), a dielektrik je vazduh. Napon između elektroda je U. Kolika električna sila deluje na jednu elektrodu? (*P930905*)

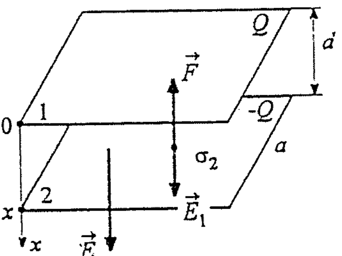
REŠENJE:
Pošto je odstojanje između ploča veoma malo u odnosu na dimenzije ploča, ivični efekti se mogu zanemariti. Naelektrisanja elektroda su Q, odnosno $-Q$, te je

$$Q = CU = \frac{\epsilon_0 SU}{d} \quad (S = a^2)\,, \tag{35.1}$$

gde je C kapacitivnost kondenzatora, a S površina ploča.

Električna sila na drugu elektrodu kondenzatora (slika 35.1) je

$$F = \int_{S_2} \sigma_2 E_1 \, dS\,. \tag{35.2}$$



Slika 35.1.

U gornjoj jednačini, σ_2 i E_1 su gustina površinskog naelektrisanja druge elektrode i vektor jačine električnog polja naelektrisane prve elektrode u tačkama površi druge elektrode, respektivno, dati sa

$$\sigma_2 = -\frac{Q}{S}\,, \qquad E_1 = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}\,i\,. \tag{35.3}$$

Tako se dobija

$$F = -\frac{\epsilon_0 a^2 U^2}{2d^2}\,i\,. \tag{35.4}$$

Sila na prvu elektrodu je suprotna. Sile na elektrode su privlačne.

Drugi način računanja električnih sila podrazumeva primenu principa virtualnih radova (pomeraja). Označimo sa x odstojanje elektroda kondenzatora sa slike 35.1. Zamislimo da je električna sila (koju tražimo) pomerila drugu elektrodu kondenzatora za dužinu dx u pravcu x-ose.

Ukoliko se u eksperimentu zamišljenog pomeraja elektrode duž x-ose, opterećenost kondenzatora održava konstantnom, x-komponenta sile na tu elektrodu se dobija kao

$$F_x = -\frac{dW_e}{dx}\,, \qquad W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 x}{2\epsilon_0 S} \quad (Q = \text{const})\,, \tag{35.5}$$

gde je W_e energija kondenzatora. Diferenciranjem, uz uslov $x = d$ i izraz (35.1), dobija se rezultat (35.4).

Ako se, međutim, prilikom zamišljenog pomeraja elektrode, napon kondenzatora održava konstantnim (kondenzator je vezan za fiktivan generator konstantnog napona), imamo

$$F_x = \frac{dW_e}{dx}\,, \qquad W_e = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 SU^2}{2x} \quad (U = \text{const})\,, \tag{35.6}$$

što, nakon obavljenog diferenciranja i smene $x = d$, opet daje gornji rezultat.

Konačno, tražena sila se može odrediti i preko pritiska. Naime, pritisak električnih sila na površ provodnika u vazduhu je brojno jednak gustini električne energije uz površ provodnika,

$$p_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\,. \tag{35.7}$$

E je jačina (ukupnog) električnog polja u vazduhu uz površ provodnika, koja u našem slučaju iznosi $E = U/d$. Pritisak p_e je uvek usmeren od površi provodnika ka dielektriku. Tako, za električnu silu na donju elektrodu kondenzatora (videti sliku 35.1) imamo $F_x = -p_e S = -\epsilon_0 a^2 U^2/(2d^2)$.

36. Izvesti izraz za podužnu kapacitivnost nesimetričnog tankog dvožičnog voda. Poluprečnici provodnika voda su a i b, odstojanje između osa provodnika je d, a dielektrik je vazduh. (*P951210*)

REŠENJE:
Pretpostavimo da su provodnici opterećeni naelektrisanjima podužnih gustina Q' i $-Q'$, pri čemu je $Q' > 0$ (slika 36.1). Vektor jačine električnog polja u vakuumu, E, se, po principu superpozicije, može odrediti kao

$$E(Q', -Q') = E(Q', 0) + E(0, -Q') \tag{36.1}$$

Pošto su, prema uslovu zadatka, provodnici voda tanki (u odnosu na odstojanje njihovih osa), polje $E(Q', 0)$ (polje sistema koji čine pozitivno naelektrisan prvi provodnik i nenaelektrisan drugi provodnik u vakuumu) ćemo odrediti kao polje (E_1) naelektrisanog prvog provodnika kao da je usamljen, tj. bez prisustva drugog (nenaelektrisanog) provodnika. Na isti način ćemo polje $E(0, -Q')$ aproksimirati poljem E_2 negativno naelektrisanog drugog provodnika, bez prisustva prvog (nenaelektrisanog) provodnika. U tački M u ravni osa provodnika vektori E_1 i E_2 su kolinearni, te je intenzitet rezultantnog polja

$$E = E_1 + E_2 = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\,, \tag{36.2}$$

gde je x koordinata koja definiše položaj tačke M.

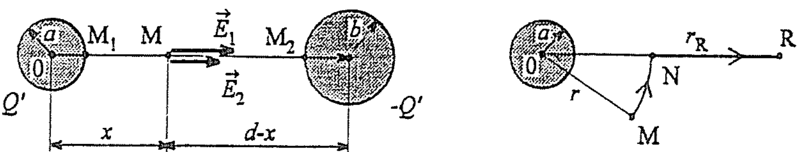
Napon između prvog i drugog provodnika je

$$U = \int_{x=a}^{d-b} E\,dx = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left[\int_a^{d-b}\frac{dx}{x} - \int_a^{d-b}\frac{d(d-x)}{d-x}\right] =$$

$$\frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left[\ln x|_a^{d-b} - \ln(d-x)|_a^{d-b}\right] = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{d-b}{a} - \ln\frac{b}{d-a}\right) =$$

$$\frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{(d-a)(d-b)}{ab} \approx \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d^2}{ab}\,, \tag{36.3}$$

pri čemu su upotrebljene relacije $d - a \approx d$ i $d - b \approx d$. Sada je izraz za podužnu



Slika 36.1. Slika 36.2.

kapacitivnost voda

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\frac{d}{\sqrt{ab}}} . \tag{36.4}$$

(Očigledno, za $b = a$ dobija se podužna kapacitivnost tankog simetričnog vazdušnog dvožičnog voda.)

Zadatak se može rešiti i koristeći se izrazom za potencijal usamljenog ravnomerno naelektrisanog žičanog provodnika u vazduhu,

$$V = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_R}{r} , \tag{36.5}$$

gde je Q' podužna gustina naelektrisanja provodnika, a r_R i r su odstojanja referentne tačke, R, i tačke u kojoj se računa potencijal, M, od ose provodnika, respektivno (slika 36.2). Gornji izraz se jednostavno dobija cirkulacijom polja duž linije ucrtane na slici 36.2. Referentnu tačku nije moguće uzeti na beskonačno velikom odstojanju od ose provodnika, jer bi se dobio beskonačan potencijal, $V \to \infty$ (radi se o sistemu u kome se naelektrisanja protežu u beskonačnost).

Za referentnu tačku potencijala usvojimo tačku R na površi desnog provodnika voda sa slike 36.1. Potencijal tačke M_1 na površi levog provodnika je zbir potencijala pojedinih naelektrisanih provodnika, kao da su usamljeni (jer su veoma udaljeni jedan od drugoga), tj., na osnovu izraza (36.5),

$$V_{M_1} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{d-b}{a} + \frac{-Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{b}{d-a} , \tag{36.6}$$

što, uz relaciju $C' = Q'/V_{M_1}$, daje izraz (36.4).

37. Tanak vazdušni dvožični vod, poluprečnika provodnika a i odstojanja između osa provodnika d ($d \gg a$), priključen je na stalan napon U. Odrediti podužnu elektrostatičku silu na provodnike voda. (*P940130*)

REŠENJE:
Podužna opterećenost voda (slika 37.1) iznosi

$$Q' = C'U = \frac{\pi\epsilon_0 U}{\ln\frac{d}{a}} \qquad (U_{12} = U) . \tag{37.1}$$

Intenzitet polja prvog naelektrisanog provodnika na mestu drugog je

$$E = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0 d} , \tag{37.2}$$

pri čemu su pravac i referentni smer vektora E označeni na slici 37.1.

Podužna sila na drugi provodnik se dobija kao

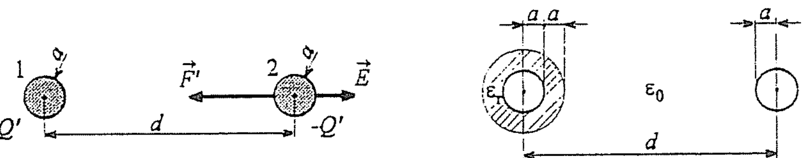
$$F' = \oint_C \sigma E \, dl , \tag{37.3}$$

gde je sa C označena kontura poprečnog preseka drugog provodnika, a σ je gustina površinskog naelektrisanja duž te konture. Kako je, međutim, provodnik tanak, može se smatrati da se vektor E ne menja duž konture C, pa ga je moguće izvući ispred znaka integrala, što, za referentni smer sile ka prvom provodniku, daje

$$F' = Q'E = \frac{\pi\epsilon_0 U^2}{2d\left(\ln\frac{d}{a}\right)^2} . \tag{37.4}$$

Sila na prvi provodnik je suprotna. Sile su privlačne.

Preporučuje se čitaocu da reši zadatak i primenom principa virtualnih radova.



Slika 37.1. Slika 38.1.

38. Levi provodnik tankog vazdušnog dvožičnog voda, poluprečnika provodnika a i rastojanja između osa provodnika d ($d \gg a$), izolovan je slojem dielektrika, relativne permitivnosti ϵ_r i debljine a, kao na slici 38.1. Ako je levi provodnik opterećen naelektrisanjem podužne gustine Q', a desni sa $-Q'$, odrediti izraz za vektor podužne električne sile na desni provodnik. (*P961004*)

REZULTAT:
Podužna sila je privlačna, intenziteta $F' = Q'^2/(2\pi\epsilon_0 d)$.

39. Veoma dugačak dvožični vazdušni vod, poluprečnika provodnika a i rastojanja između njih d ($d \gg a$), priključen je na najveći napon pri kome još ne dolazi do pojave korone na površima provodnika. Odrediti pri tome (a) podužnu opterećenost provodnika i (b) podužnu elektrostatičku silu na provodnike voda. Dielektrična čvrstoća vazduha je E_{kr0}. (*P960401*)

REŠENJE:
Neka su Q' i $-Q'$ podužne gustine naelektrisanja provodnika voda. Polje je maksimalnog intenziteta u tačkama uz površi provodnika. U tim tačkama rezultantno polje približno računamo kao polje jednog usamljenog naelektrisanog provodnika, jer je drugi provodnik veoma udaljen. Tako imamo

$$E_{\rm max} = \frac{|Q'|}{2\pi\epsilon_0 a} . \qquad (39.1)$$

Do proboja (pojave korone) u vazduhu stoga dolazi kada je $E_{\rm max} = E_{\rm kr0}$, odakle je kritična podužna opterećenost (u trenutku proboja)

$$|Q'|_{\rm kr} = 2\pi\epsilon_0 a E_{\rm kr0} , \qquad (39.2)$$

što ćemo uzeti za maksimalnu dozvoljenu podužnu opterećenost.

Pri tome, podužna sila na provodnike voda je

$$F' = \frac{Q'^2_{\rm kr}}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{2\pi\epsilon_0 a^2 E^2_{\rm kr0}}{d} . \qquad (39.3)$$

Preporučuje se čitaocu da odredi izraz za najveći dozvoljeni napon između provodnika voda.

40. Tačkasto naelektrisanje Q se nalazi u vakuumu na visini h iznad provodne ravni. (a) Izračunati površinsku gustinu indukovanog naelektrisanja u proizvoljnoj tački ravni. (b) Dokazati da je ukupno indukovano naelektrisanje u ravni $-Q$. (*P960130*)

REŠENJE:
(a) Gustina površinskog indukovanog naelektrisanja u tački M ravni, definisanoj koordinatom R (slika 40.1), je

$$\sigma_{\rm ind} = \epsilon_0 n \cdot E , \qquad (40.1)$$

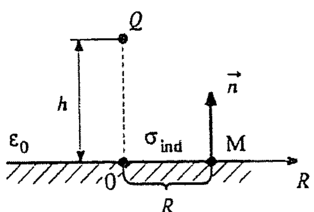
gde je n ort normale usmeren od ravni ka Q, a E je polje u vakuumu, u tački koja je sa gornje strane priljubljena uz tačku M. To je polje tačkastog naelektrisanja Q i naelektrisanja indukovanog u ravni. Po teoremi likova (ogledanja), međutim, polje indukovanog naelektrisanja jednako je polju tačkastog naelektrisanja (u vakuumu) koje predstavlja negativan lik u ogledalu zadatog (originalnog) tačkastog naelektrisanja (slika 40.2). Sada je, na osnovu principa superpozicije, a prema slici 40.2,

$$E = E_{\rm originala} + E_{\rm lika} = 2E_Q \cos\alpha\,(-n) ,$$

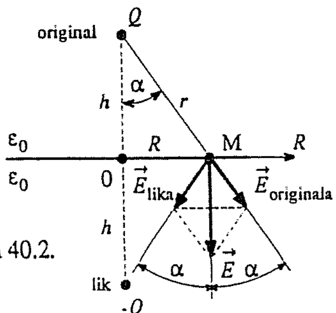
$$E_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} , \qquad r = \sqrt{R^2 + h^2}, \qquad \cos\alpha = \frac{h}{r} . \qquad (40.2)$$

Konačno,

$$\sigma_{\rm ind} = -\frac{Qh}{2\pi\,(R^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} . \qquad (40.3)$$



Slika 40.1.



Slika 40.2.

(b) Ukupno indukovano naelektrisanje u ravni je

$$Q_{\rm ind} = \int_S \sigma_{\rm ind} \underbrace{2\pi R\,dR}_{dS} = -Qh \int_{R=0}^{\infty} \frac{R\,dR}{r^3} =$$

$$-Qh \int_{R=0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = Qh \frac{1}{r}\bigg|_{R=0}^{\infty} = -Q , \qquad (40.4)$$

pri čemu je upotrebljena diferencijalna relacija (10.4), a to je i trebalo dokazati.

41. Metalna kuglica, poluprečnika a, nalazi se u vakuumu na visini h ($h \gg a$) iznad beskonačno velike ravne metalne folije. Odrediti (a) izraz za površinsku gustinu indukovanog naelektrisnja na foliji u podnožju kuglice, i (b) izraz za kapacitivnost kuglice prema foliji. (*P960701*)

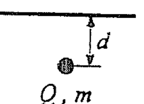
REZULTAT:
Traženi izrazi su (a) $\sigma_{\rm ind} = -Q/(2\pi h^2)$ i (b) $C = 4\pi\epsilon_0 a$.

42. Mala naelektrisana lopta, mase m i naelektrisanja Q, postavljena je u vazduhu ispod velike horizontalne, električki neutralne metalne ploče, kao što je prikazano na slici 42.1. (a) Koliko treba da bude odstojanje d između lopte i ploče da bi električna i gravitaciona sila koje deluju na loptu bile u ravnoteži? (b) Da li je to stabilna ili labilna ravnoteža? (*P940919*)

REŠENJE:
(a) Pod dejstvom polja naelektrisane loptice, na metalnoj ploči se indukuje naelektrisanje. Električna sila na lopticu je $F_e = QE_{\sigma_{\rm ind}}$, gde je $E_{\sigma_{\rm ind}}$ polje indukovanog naelektrisanja na ploči, koje se može odrediti primenom teoreme likova. Naime, $E_{\sigma_{\rm ind}} = E_{-Q}$, gde je E_{-Q} polje loptice, naelektrisane naelektrisanjem $-Q$, koja predstavlja lik (u ravni ploče, kao ogledalu) date loptice. Na taj način, zaključujemo

da električna sila na lopticu deluje nagore i da je njen intenzitet

$$F_e = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 d^2} . \tag{42.1}$$



Slika 42.1.

Gravitaciona sila, intenziteta

$$F_g = mg , \tag{42.2}$$

gde je g ubrzanje zemljine teže ($g \approx 9,807$ m/s^2), deluje nadole, pa iz uslova ravnoteže ovih dveju sila sledi $d = |Q|/(4\sqrt{\pi\epsilon_0 mg})$.

(b) Ravnoteža je labilna. Naime, ako se loptica malo približi ploči, električna sila će postati jača od gravitacione i lopticu privući ka ploči. Ako se, pak, loptica malo udalji od prethodno određenog ravnotežnog položaja, gravitaciona sila će prevladati i loptica će početi da pada.

43. Vrlo dugačko vlakno, konstantne podužne gustine naelektrisanja Q', postavljeno je u vakuumu paralelno provodnoj ravni na visini h. Izračunati (a) podužnu silu koja deluje na vlakno, i (b) raspodelu naelektrisanja indukovanog u ravni. (*Z920825*)

REŠENJE:

(a) Podužna sila na vlakno je $F' = Q'E_2$, gde je E_2 polje na mestu vlakna usled indukovanog površinskog naelektrisanja u ravni. Po teoremi likova, to polje je jednako polju naelektrisanog vlakna koje predstavlja negativan lik u ogledalu originalnog vlakna (slika 43.1), te je

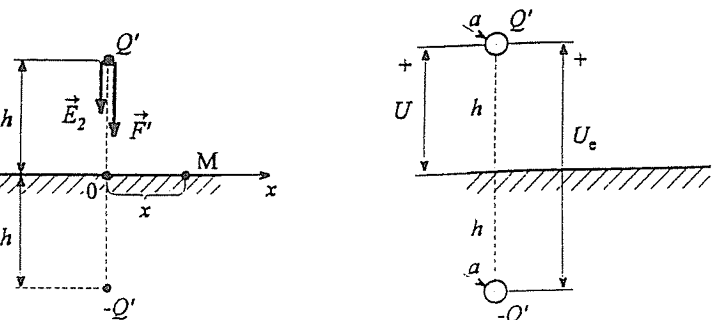
$$F' = \frac{Q'^2}{4\pi\epsilon_0 h} . \tag{43.1}$$

Sila je privlačna.

(b) Postupak određivanja raspodele indukovanog površinskog naelektrisanja u ravni videti u zadatku 40. Gustina toga naelektrisanja u tački M sa slike 43.1 je

$$\sigma_{ind} = -\frac{Q'h}{\pi(x^2+h^2)} . \tag{43.2}$$

44. Veoma dugačka tanka žica, poluprečnika $a = 5$ mm, postavljena je u vazduhu paralelno provodnoj ravni na visini $h = 10$ m. (a) Izračunati podužnu kapacitivnost ovoga sistema (C'). Ako je jačina polja pri kojoj dolazi do proboja vazduha $E_{kr0} =$ 30 kV/cm, kolika je najveća podužna gustina električne energije (W'_e)? (*Z930619*)



Slika 43.1. Slika 44.1.

REŠENJE:

Uticaj naelektrisanja indukovanog u provodnoj ravni može se zameniti uvođenjem negativnog lika naelektrisane žice (slika 44.1), tako da je zadatom sistemu ekvivalentan tanak dvožični vod poluprečnika provodnika a i odstojanja između osa provodnika $d = 2h$.

(a) Pretpostavimo da je opterećenje gornje žice Q'. Prema slici 44.1, podužna kapacitivnost sistema žica–ravan je

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{Q'}{\frac{U_e}{2}} = 2\frac{Q'}{Ue} = 2C'_e = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\frac{2h}{a}} = 6,7 \text{ pF/m} , \tag{44.1}$$

gde je C'_e podužna kapacitivnost ekvivalentnog dvožičnog voda.

(b) Najveća podužna opterećenost sistema je, prema izrazu (39.2), $|Q'|_{kr} =$ 834 nC/m, pa je najveća podužna gustina električne energije

$$(W'_e)_{kr} = \frac{Q'^2_{kr}}{2C'} = 52 \text{ mJ/m} . \tag{44.2}$$

45. Tanak žičani veoma dugačak provodnik, poluprečnika $a = 5$ mm, nalazi se u vazduhu na visini $h = 10$ m iznad ravne površine zemlje, paralelno njoj. Provodnik je uzemljen, a nalazi se u homogenom elektrostatičkom atmosferskom polju, jačine E_0, koje je normalno na površinu zemlje i usmereno ka njoj. Izračunati podužnu gustinu naelektrisanja indukovanog u žičanom provodniku, i to (a) u slučaju $E_0 =$ 3 V/cm, i (b) u slučaju proboja u vazduhu. Kritično polje za vazduh je $E_{kr} =$ 30 kV/cm. Za slučaj $E_0 = 3$ V/cm odrediti: (c) gustinu indukovanog naelektrisanja u proizvoljnoj tački površi zemlje i (d) potencijal u odnosu na zemlju proizvoljne tačke u vazduhu. (*Z951210*)

REŠENJE:

Zemlja predstavlja provodnu ravan. Pretpostavimo, kao što je uobičajeno, da je potencijal takve ravni nula. Pošto je žičani provodnik uzemljen (galvanski spojen

sa zemljom), na njemu će se pod dejstvom atmosferskog polja, E_0, indukovati naelektrisanje. Označimo podužnu gustinu toga naelektrisanja sa Q'. Uticaj zemlje (provodne ravni) zamenjujemo likom žičanog provodnika, opterećenim sa $-Q'$ (slika 45.1).

Slika 45.1.

Potencijal u (proizvoljnoj) tački M definisanoj koordinatama x i y u odnosu na referentnu tačku R na površi zemlje je, prema slici 45.1,

$$V(x,y) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{h}{r_1} + \frac{-Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{h}{r_2} + E_0 y\,, \qquad (45.1)$$

gde prva dva sabirka predstavljaju, redom, potencijale usled originalnog žičanog provodnika i njegovog lika, dok treći sabirak predstavlja potencijal atmosferskog polja, E_0. Prva dva parcijalna potencijala dobijena su na osnovu obrasca (36.5), a treći je određen cirkulacijom (homogenog) polja E_0 od tačke M do tačke R, po putanji sastavljenoj od vertikalnog dela dužine y i horizontalnog dela dužine x. Nakon sređivanja,

$$V(x,y) = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} + E_0 y\,. \qquad (45.2)$$

Potencijal tačke M_1 na površi žičanog provodnika je nula (provodnik je uzemljen), pa, na osnovu (45.2), dobijamo

$$V_{M_1} = \frac{Q'}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{2h}{a} + E_0 h = 0\,. \qquad (45.3)$$

Odavde sledi

$$Q' = -\frac{2\pi\epsilon_0 E_0 h}{\ln\frac{2h}{a}}\,. \qquad (45.4)$$

Kombinovanjem jednačina (45.2) i (45.4), kao i odgovarajućih izraza za odstojanja r_1 i r_2, dobijamo

$$V(x,y) = -\frac{E_0 h}{\ln\frac{2h}{a}}\ln\frac{\sqrt{x^2+(h+y)^2}}{\sqrt{x^2+(h-y)^2}} + E_0 y\,. \qquad (45.5)$$

(a) U slučaju $E_0 = 3$ V/cm, na osnovu izraza (45.4), je $Q' = -20,12$ nC/m. Pri tome, jačina polja na površi žičanog provodnika, prema relaciji (39.1), iznosi

$|E_{M_1}| = 0,723$ kV/cm. Kako je $|E_{M_1}| < E_{kr}$, radi se o "normalnom stanju" sistema, tj. nema opasnosti od proboja (u bilo kojoj tački vazduha).

(b) U slučaju proboja vazduha (uz površ žičanog provodnika), na osnovu relacije (39.2) je $Q' = \pm 834,5$ nC/m.

(c) Na osnovu (43.2), gustina površinskog indukovanog naelektrisanja u tački M_2 sa koordinatama $(x,0)$ je data sa

$$\sigma_{ind} = -\frac{Q'h}{\pi(x^2+h^2)} - \epsilon_0 E_0\,, \qquad (45.6)$$

pri čemu je poslednji član u gornjem izrazu dobijen uvrštavanjem jačine polja E_0 u obrazac (40.1). Za $E_0 = 3$ V/cm, imamo

$$\sigma_{ind} = -2,66\left(1 - \frac{24,11}{x^2+100}\right)\frac{\text{nC}}{\text{m}^2} \qquad (x \text{ u m})\,. \qquad (45.7)$$

(d) U slučaju $E_0 = 3$ V/cm, potencijal tačke M je, na osnovu izraza (45.5),

$$V(x,y) = \left[-361,7\ln\frac{\sqrt{x^2+(10+y)^2}}{\sqrt{x^2+(10-y)^2}} + 300y\right]\ \text{V} \qquad (x \text{ i } y \text{ u m})\,. \qquad (45.8)$$

Preporučuje se čitaocu da izračuna polje u tački M_3 sa koordinatama (0; 7,5 m) u slučaju proboja vazduha, te da na osnovu toga objasni gromobranski (zaštitni) efekat uzemljenog žičanog provodnika u odnosu na njegovu okolinu. (Provodnik sa slike 45.1 može da predstavlja zaštitu za provodnike dalekovoda postavljene na mesto tačke M_3.)

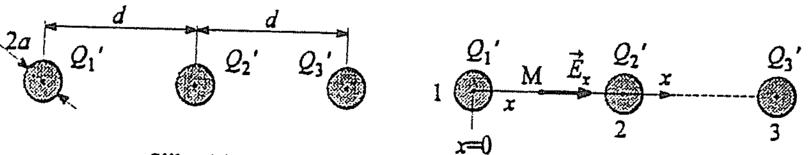
46. Tri veoma dugačke paralelene žice nalaze se u vazduhu, kao što je prikazano na slici 46.1. Poluprečnici žica su $a = 1$ mm, odstojanja između njih su $d = 50$ mm, a podužna naelektrisanja su im $Q'_1 = Q'_3 = Q'/2$ i $Q'_2 = -Q'$. (a) Izračunati najveće (po modulu) podužno naelektrisanje Q' pod uslovom da ne dođe do proboja vazduha, ako je kritično polje jačine $E_{kr0} = 3$ MV/m. (b) Izračunati napon između prve i druge žice u tome slučaju. (*Z960930*)

REŠENJE:

(a) Najjače električno polje je na površi srednje žice. Na osnovu jednačina (39.1) i (39.2) imamo $|Q'| = 167$ nC/m, odnosno $Q' = \pm 167$ nC/m.

(b) Prema slici 46.2, vektor jačine polja u tački M definisanoj koordinatom x, na duži koja spaja provodnike 1 i 2, ima samo x-komponentu, koja iznosi

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} + E_{x3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q'_1}{x} - \frac{Q'_2}{d-x} - \frac{Q'_3}{2d-x}\right)\,. \qquad (46.1)$$



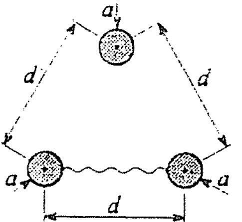
Slika 46.1. Slika 46.2.

Stoga je traženi napon

$$U_{12} = \int_{x=a}^{d-a} E_x \,\mathrm{d}x = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_a^{d-a}\frac{\mathrm{d}x}{x} + 2\int_a^{d-a}\frac{\mathrm{d}x}{d-x} - \int_a^{d-a}\frac{\mathrm{d}x}{2d-x}\right] =$$

$$\frac{Q'}{4\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{d-a}{a} - 2\ln\frac{a}{d-a} + \ln\frac{d+a}{2d-a}\right) = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0}\left(3\ln\frac{d}{a} - \ln 2\right) = \pm 16,6\ \mathrm{kV}\,, \tag{46.2}$$

pri čemu je uzeto u obzir $d - a \approx d$, $d + a \approx d$ i $2d - a \approx 2d$.



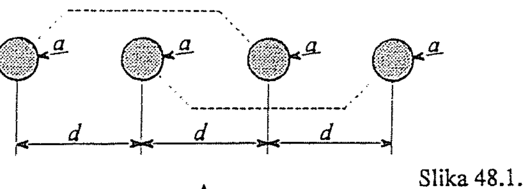
Slika 47.1.

47. Tri tanka, vrlo dugačka, paralelna žičana provodnika nalaze se u vakuumu, a poprečni presek je prikazan na slici 47.1. Poluprečnik svake žice je $a = 1$ mm, a rastojanje između osa svakog para žica je $d = 100$ mm. Dve žice su galvanski povezane. Odrediti podužnu kapacitivnost ovakvog kondenzatora. (*Z961122*)

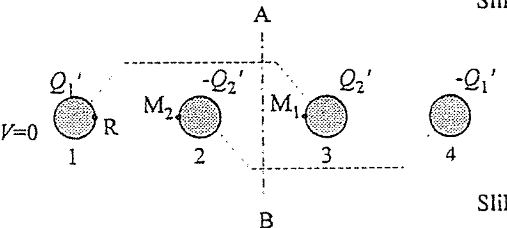
REZULTAT:
Tražena podužna kapacitivnost iznosi $C' = 8$ pF/m.

48. Četiri tanka, vrlo dugačka, paralelna žičana provodnika postavljena su u vakuumu u horizontalnoj ravni. Poprečni presek sistema prikazan je na slici 48.1. Poluprečnik svake žice je $a = 1$ mm, a rastojanje između osa dve susedne žice je $d = 200$ mm. Prva i treća žica su galvanski povezane, kao i druga i četvrta žica (isprekidane linije na slici). Izračunati podužnu kapacitivnost ovoga sistema. (*Z950929*)

REŠENJE:
Sistem sa slike 48.1 je dvoprovodnički vod, koji se može posmatrati kao kondenzator. Prvu elektrodu kondenzatora (prvi provodnik voda) čine prva i treća žica, i kratki provodnik za galvanski spoj između njih, dok druga i četvrta žica, sa odgovarajućim spojnim provodnikom, predstavljaju drugu elektrodu kondenzatora (drugi provodnik voda). Po standardnom algoritmu za proračun kapacitivnosti kondenzatora, opteretimo prvu elektrodu naelektrisanjem podužne gustine Q' ($Q' > 0$), a drugu



Slika 48.1.



Slika 48.2.

suprotnim naelektrisanjem. Pretpostavimo da se naelektrisanja u kratkospojnicima mogu zanemariti. Zbog geometrijske simetrije sistema u odnosu na ravan AB (slika 48.2), a suprotne opterećenosti elektroda kondenzatora, raspodela naelektrisanja u sistemu mora biti antisimetrična u odnosu na ravan AB, kao što je prikazano na slici 48.2. Usvojimo tačku R na površi prve žice za tačku nultog potencijala.

Potencijal tačke M_1 na površi treće žice se može dobiti sabiranjem odgovarajućih parcijalnih potencijala, kao doprinosa pojedinih naelektrisanih žica. Parcijalni potencijali se računaju na osnovu obrasca (36.5). Tako imamo

$$V_{M_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(Q_1'\ln\frac{a}{2d} - Q_2'\ln\frac{d}{d} + Q_2'\ln\frac{2d}{a} - Q_1'\ln\frac{3d}{d}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(Q_1'\ln\frac{a}{6d} + Q_2'\ln\frac{2d}{a}\right). \tag{48.1}$$

Pošto su prva i treća žica galvanski spojene, to je $V_{M_1} = 0$, pa iz (48.1) sledi

$$\frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{\ln\frac{2d}{a}}{\ln\frac{6d}{a}} = 0,845\,. \tag{48.2}$$

Kako je i

$$Q_1' + Q_2' = Q'\,, \tag{48.3}$$

imamo

$$Q_1' = 0,458Q'\,, \qquad Q_2' = 0,542Q'\,. \tag{48.4}$$

Na sličan način, potencijal tačke M_2 na površi druge žice je

$$V_{M_2} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(Q_1'\ln\frac{a}{d} - Q_2'\ln\frac{d}{a} + Q_2'\ln\frac{2d}{d} - Q_1'\ln\frac{3d}{2d}\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\left(Q_1'\ln\frac{2a}{3d} + Q_2'\ln\frac{2a}{d}\right). \tag{48.5}$$

što, nakon uvrštavanja izraza (48.4), rezultuje u $V_{M_2} = (-91,95 \times 10^9 \text{ m/F})\, Q'$. Konačno, podužna kapacitivnost sistema je

$$C' = \frac{Q'}{V_1 - V_2} = -\frac{Q'}{V_{M_2}} = 10,87 \text{ p}\frac{\text{F}}{\text{m}} . \qquad (48.6)$$

Ukoliko se, na samom početku rešavanja zadatka, ne bi uočila antisimetrija raspodele naelektrisanja u sistemu, morao bi se obaviti proračun preraspodele podužnih naelektrisanja i između druge i četvrte žice. Naime, polazeći od uslova $V_2 = V_4$, obavio bi se proračun koji je za prvu elektrodu kondenzatora (prvu i treću žicu) dat u jednačinama (48.1)-(48.3). Naravno, kao rezultat bi se dobili izrazi (48.4), sa dodatkom negativnih predznaka.

Uopšte, čitaocu se preporučuje da, pre nego što počne da piše odgovarajuće jednačine, uvek razmotri mogućnost upotrebe eventualnih simetrija datog problema.

49. U svakoj tački dielektrika u elektrostatičkom polju poznat je vektor polarizacije $\boldsymbol{P}$. U tom dielektriku uočena je zatvorena površ S. Koliko je ukupno vezano naelektrisanje obuhvaćeno površi S? (*P900622*)

REŠENJE:
Ukupno vezano naelektrisanje unutar površi S je

$$Q_p = -\oint_S \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} , \qquad (49.1)$$

pri čemu je površ orijentisana upolje (kao na slici 1.2).

50. Dokazati da po zapremini homogeno polarizovanog dielektrika nema viška vezanih naelektrisanja. (*P950404*)

REŠENJE:
Uočimo proizvoljnu tačku M u dielektriku i zamislimo veoma malu sferičnu površ S koja obuhvata tu tačku. Ukupno vezano naelektrisanje Q_p obuhvaćeno površi S dato je integralnim izrazom u (49.1). Kako je po uslovu zadatka $\boldsymbol{P}$ = const (homogeno polarizovan dielektrik), imamo

$$Q_p = -\boldsymbol{P} \cdot \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 . \qquad (50.1)$$

jer je, očigledno, $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$ kroz sferičnu površ. Naime, vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ u proizvoljnoj tački A na površi sfere može se pridružiti vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{S}' = -\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ u tački A' na drugom kraju prečnika AA' sfere (centralno simetrične tačke, u odnosu na centar sfere), te je $\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \mathrm{d}\boldsymbol{S}' = 0$. Konačno, pošto je domen v obuhvaćen površi S veoma mali, gustina vezanog naelektrisanja u tački M je

$$\rho_p = \frac{Q_p}{v} = 0 . \qquad (50.2)$$

Prema tome, po zapremini homogeno polarizovanog dielektrika nema (viška) vezanog naelektrisanja, što je i trebalo dokazati.

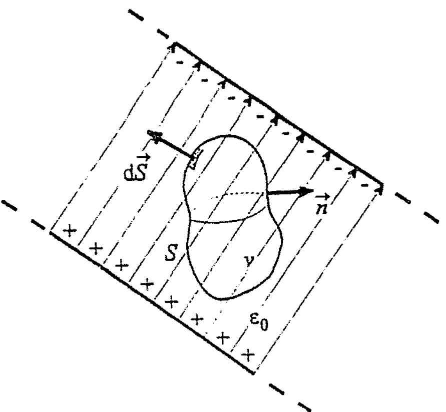
Napomena: Slučaj *homogeno polarizovanog dielektrika* treba razlikovati od slučaja *polarizovanog homogenog dielektrika* (videti zadatke 56 i 57).

Identitet

$$\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad (50.3)$$

važi za proizvoljnu zatvorenu površ S i to se može dokazati na sledeći način.

Neka se površ S, proizvoljnog oblika i veličine, nalazi u prostoru između veoma velikih elektroda vazdušnog opterećenog pločastog kondenzatora, kao na slici 50.1. Polje kondenzatora se može smatrati homogenim, te primenom Gausovog zakona (1.2) na površ S, dobijamo



Slika 50.1.

$$\boldsymbol{E} \cdot \oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \qquad (\boldsymbol{E} = \text{const}, Q_S = 0) . \qquad (50.4)$$

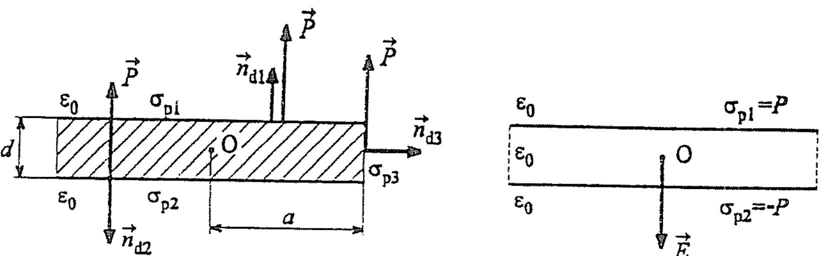
Kondenzator se, međutim, zajedno sa svojim poljem, može na proizvoljan način okretati oko (fiksirane) površi S, pri čemu se, razume se, vektor $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ ne menja. Prema tome, relacija (50.4) je zadovoljena za proizvoljan pravac vektora $\boldsymbol{E}$ i fiksan vektor $\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{S}$, što je moguće jedino ako je zadovoljena relacija (50.3). Time je dokaz završen.

51. Tanak dielektrični disk, poluprečnika a i debljine d ($d \ll a$), homogeno je polarizovan. Vektor polarizacije je normalan na bazise diska, a intenzitet mu je P. Okolna sredina je vakuum. Odrediti (a) raspodelu vezanog naelektrisanja diska, i (b) vektor jačine električnog polja u središtu diska. (*P930409*)

REŠENJE:
(a) Pošto je disk homogeno polarizovan, po njegovoj zapremini nema viška vezanog naelektrisanja, tj. $\rho_p = 0$ [relacija (50.2)]. Gustina površinskog vezanog naelektrisanja u proizvoljnoj tački površi dielektrika se određuje kao

$$\sigma_p = \boldsymbol{n}_d \cdot \boldsymbol{P} , \qquad (51.1)$$

gde je $\boldsymbol{n}_d$ ort normale na površ dielektrika usmeren od dielektrika, a $\boldsymbol{P}$ je vektor polarizacije u dielektriku, neposredno uz površ. Na osnovu gornje jednačine i slike



Slika 51.1. Slika 51.2.

51.1, gustine vezanog naelektrisanja na gornjem i donjem bazisu diska iznose

$$\sigma_{p1} = P\,, \qquad \sigma_{p2} = -P\,, \tag{51.2}$$

respektivno, dok je na omotaču diska $\sigma_{p3} = 0$.

(b) Uticaj dielektrika na električno polje se može zameniti izračunatom raspodelom vezanog naelektrisanja u vakuumu. Stoga je polje u disku i izvan njega jednako polju dva kružna uniformna plašta naelektrisanja, gustina σ_{p1} i σ_{p2}, u vakuumu (slika 51.2). Kako je $d \ll a$, polje u središtu diska se može aproksimirati poljem između dve suprotno naelektrisane ravni, $E = \sigma_{p1}/\epsilon_0$. Konačno,

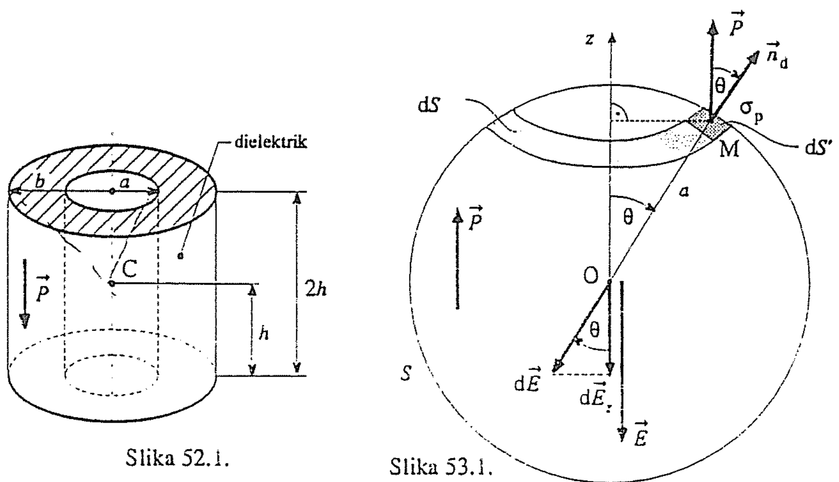
$$E = -\frac{P}{\epsilon_0}\,. \tag{51.3}$$

52. Šupalj dielektrični valjak, poluprečnika a i b i visine $2h$, ravnomerno je polarizovan po svojoj zapremini. Vektor polarizacije je normalan na bazise valjka, kao što je prikazano na slici 52.1. Intenzitet vektora polarizacije je P. Okolna sredina je vazduh. Odrediti vektor jačine električnog polja u centru valjka (tački C) usled vezanog naelektrisanja valjka. (*Z960302*)

REZULTAT:
Izraz za traženi vektor jačine električnog polja glasi: $E = -Ph\left(1/\sqrt{a^2+h^2} - 1/\sqrt{b^2+h^2}\right)/\epsilon_0$.

53. Dielektrična lopta, poluprečnika a, nalazi se u vazduhu. Lopta je homogeno polarizovana po svojoj zapremini. Intenzitet vektora polarizacije je P. Odrediti: (a) raspodelu vezanog naelektrisanja po površi lopte, (b) potencijal u centru lopte, (c) vektor jačine električnog polja u centru lopte i (d) vektor električne indukcije u centru lopte. (*Z951210*)

REŠENJE:
(a) Uvedimo koordinatni sistem čija je z-osa paralelna vektoru polarizacije, $\boldsymbol{P}$ (slika 53.1). Gustina zapreminskog vezanog naelektrisanja u proizvoljnoj tački lopte je



Slika 52.1. Slika 53.1.

$\rho_p = 0$ (lopta je homogeno polarizovana). Na drugoj strani, gustina površinskog vezanog naelektrisanja u tački M na površi lopte, čiji je položaj definisan uglom θ, iznosi, na osnovu obrasca (51.1),

$$\sigma_p = P\cos(n_d, P) = P\cos\theta\,, \quad 0 \le \theta \le \pi\,. \tag{53.1}$$

Sada se, što se tiče električnog polja i potencijala u proizvoljnoj tački dielektrika ili vazduha, dielektrični materijal može ukloniti, a proračun obaviti za slučaj sferičnog plašta naelektrisanja, poluprečnika a, u vakuumu. Gustina naelektrisanja plašta je funkcija ugla θ (53.1).

(b) Potencijal centra lopte (u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti) je

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_S \frac{\sigma_p\,dS'}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}Q_p\,, \tag{53.2}$$

gde je sa S označena površ lopte, a dS' je elementarna površ, naelektrisana naelekrisanjem $\sigma_p\,dS'$. Kako ukupno vezano naelektrisanje lopte, Q_p, po samoj prirodi vezanog naelektrisanja mora biti jednako nuli, sledi $V = 0$.

(c) Zbog simetrije, vektor jačine električnog polja u centru lopte, E, ima samo z-komponentu. Ona iznosi (videti sliku 53.1)

$$E_z = \int_S dE_z\,, \quad dE_z = -dE\cos\theta\,, \quad dE = \frac{\sigma_p\,dS'}{4\pi\epsilon_0 a^2}\,, \tag{53.3}$$

gde je dE intenzitet vektora jačine električnog polja tačkastog naelektrisanja kojim je, u tački M, ekvivalentirana naelektrisana elementarna površ dS' (u vidu

elementarnog pravougaonika). Sada je

$$E_z = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0 a^2}\int_S \cos^2\theta\,\mathrm{d}S' . \qquad (53.4)$$

Kako, međutim, podintegralna funkcija u gornjem površinskom integralu ($\cos^2\theta$) zavisi samo od ugla θ, elementarnu površ $\mathrm{d}S'$ možemo produžiti u veću elementarnu površ $\mathrm{d}S$ u vidu tankog kružnog prstena poluprečnika $a\sin\theta$ i širine $a\,\mathrm{d}\theta$.[2] Na osnovu izraza za $\mathrm{d}S$ (12.1), imamo

$$E_z = -\frac{P}{2\epsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\frac{P}{3\epsilon_0} , \qquad (53.5)$$

tj.

$$E = -\frac{P}{3\epsilon_0} . \qquad (53.6)$$

(d) Po definiciji, vektor električne indukcije je

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} , \qquad (53.7)$$

što u centru lopte iznosi $D = 2P/3$.

Uočimo da je $\boldsymbol{D} \neq 0$, iako u datom sistemu nema slobodnog naelektrisanja. Naime, ukoliko u određenom sistemu nema slobodnog naelektrisanja, to samo znači da je fluks vektora $\boldsymbol{D}$ kroz ma koju zatvorenu površ u sistemu jednak nuli, a ne mora da znači da je $\boldsymbol{D} = 0$.

54. Napisati osnovne integralne jednačine za elektrostatičko polje u (a) vakuumu, (b) linearnom homogenom dielektriku, (c) linearnom nehomogenom dielektriku, i (d) nelinearnom dielektriku.

REŠENJE:
Elektrostatičko polje je potpuno određeno sa dve osnovne integralne jednačine. Prva od njih, jednačina (1.1), ista je u sva četiri slučaja. Druga integralna jednačina je uopšteni Gausov zakon,

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_S , \qquad (54.1)$$

gde je S proizvoljna zatvorena površ, orijentisana upolje (slika 1.2), $\boldsymbol{D}$ je vektor električne indukcije, a Q_S je ukupno (slobodno) naelektrisanje obuhvaćeno površi S. Vektor $\boldsymbol{D}$ uključuje osobine dielektrika, te se jednačina (54.1), za pojedine slučajeve iz teksta zadatka, može napisati u posebnim oblicima. U slučaju (a) to je jednačina (1.2), a u slučajevima (b), (c) i (d) uopšteni Gausov zakon se, redom, svodi na sledeće integralne jednačine:

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{Q_S}{\epsilon} \quad (\epsilon = \mathrm{const}) , \qquad (54.2)$$

[2] Videti napomenu na kraju rešenja zadatka 23.

$$\oint_S \epsilon\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_S \quad [\epsilon \neq \mathrm{const},\ \text{na primer},\ \epsilon = \epsilon(x,y,z)] , \qquad (54.3)$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_S \quad [\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E})\ \text{je nelinearna funkcija}] , \qquad (54.4)$$

gde je $\boldsymbol{E}$ vektor jačine električnog polja, dok je ϵ permitivnost (linearnog) dielektrika.

55. U linearnom nehomogenom dielektriku zamišljena je zatvorena površ S. U svakoj tački te površi poznata je permitivnost, ϵ, i vektor jačine električnog polja, $\boldsymbol{E}$. Koliko je ukupno (a) slobodno i (b) vezano naelektrisanje obuhvaćeno površi S? (*P960925*)

REŠENJE:
Za linearan dielektrik važi

$$\boldsymbol{D} = \epsilon\boldsymbol{E} , \qquad (55.1)$$

$D = \epsilon_0 \cdot E + P$

što, uz vezu (53.7), daje $\boldsymbol{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\boldsymbol{E}$. Sada, na osnovu jednačina (54.1) i (49.1), ukupno slobodno naelektrisanje, Q, i ukupno vezano naelektrisanje, Q_p, unutar površi S, iznose

$$Q = \oint_S \epsilon\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \quad \text{i} \quad Q_p = -\oint_S (\epsilon - \epsilon_0)\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} . \qquad (55.2)$$

$Q_p = -\oint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

56. U linearnom homogenom dielektriku, relativne permitivnosti ϵ_r, zamišljena je zatvorena površ S. Ukupno slobodno naelektrisanje obuhvaćeno tom površi je Q. Koliko je ukupno vezano naelektrisanje Q_p obuhvaćeno površi S? (*P950903*)

REŠENJE:
Izrazi za ukupno slobodno i vezano naelektrisanje unutar površi S, Q i Q_p, dati su u (55.2). Kako je dielektrik homogen ($\epsilon_r = \mathrm{const}$), u tim izrazima moguće je ϵ i $\epsilon - \epsilon_0$ izvući ispred znaka integrala. Na taj način se dobija

$$Q_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}Q . \qquad (56.1)$$

Pod pretpostavkom da je površ S veoma mala, dobija se odgovarajuća relacija između gustina naelektrisanja,

$$\rho_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\rho . \qquad (56.2)$$

57. Dokazati da u homogenom linearnom dielektriku u kome nema zapreminskog slobodnog naelektrisanja nema ni zapreminskog vezanog naelektrisanja. (*P920205*)

REŠENJE:
Po uslovu zadatka, $\rho = 0$, pa je, prema (56.2), $\rho_p = 0$.

58. U jednom delu nehomogenog dielektrika postoji homogeno električno polje, jačine E. U tom polju zamišljena je zatvorena površ S. Ukupno slobodno naelektrisanje u površi S je Q. Koliko je ukupno vezano naelektrisanje u toj površi? (*P960401*)

REŠENJE:
Vezano naelektrisanje, zamišljeno u vakuumu, zamenjuje uticaj polarizovanog dielektrika na električno polje. Stoga je, po Gausovom zakonu,

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{Q + Q_p}{\epsilon_0}, \quad (58.1)$$

gde je Q_p ukupno vezano naelektrisanje obuhvaćeno površi S. Rešavanjem gornje jednačine po Q_p, dobijamo

$$Q_p = -Q + \epsilon_0 E \cdot \oint_S dS = -Q, \quad (58.2)$$

$\oint_S dS = 0$

pri čemu je iskorišćena činjenica da je, po uslovu zadatka, električno polje u posmatranom delu dielektrika homogeno (E = const), kao i identitet (50.3).

59. U svakoj tački dielektrika poznat je vektor polarizacije, P, i gustina slobodnog naelektrisanja, ρ. Drugih slobodnih naelektrisanja nema. Odrediti fluks vektora jačine električnog polja kroz zatvorenu površ S koja se nalazi u dielektriku. (*P961004*)

REŠENJE:
Na osnovu jednačina (58.1) i (49.1),

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\int_v \rho \, dv - \oint_S P \cdot dS\right), \quad (59.1)$$

gde je sa v označena zapremina domena obuhvaćenog površi S.

60. U linearnom nehomogenom dielektriku uspostavljeno je homogeno polje, vektora jačine E. Dokazati da u tom dielektriku u opštem slučaju postoje slobodna naelektrisanja. (*P930926*)

REŠENJE:
Na osnovu jednačine (54.3), ukupno slobodno naelektrisanje u proizvoljnoj površi S (koja može biti i veoma mala) zamišljenoj u datom dielektriku (na proizvoljnom

mestu) iznosi

$$Q = E \cdot \oint_S \epsilon \, dS \neq 0. \quad (60.1)$$

61. Polazeći od graničnih uslova za elektrostatičko polje, izvesti pravilo prelamanja linija elektrostatičkog polja na razdvojnoj površi dve linearne sredine, permitivnosti ϵ_1 i ϵ_2, ako na toj površi nema slobodnog naelektrisanja. (*P950404*)

REŠENJE:
Elektrostatička polja sa dve strane razdvojne površi dve proizvoljne sredine (različitih električnih osobina) povezana su posredstvom dva osnovna granična uslova. Ti uslovi se izvode iz integralnih jednačina (1.1) i (54.1), i glase

$$n \times E_1 - n \times E_2 = 0, \quad (61.1)$$

$$n \cdot D_1 - n \cdot D_2 = \sigma, \quad (61.2)$$

gde je n ort normale na razdvojnu površ, usmeren od sredine 2 ka sredini 1, a σ je gustina slobodnog površinskog naelektisanja koje (eventualno) postoji na razdvojnoj površi. Granični uslov (61.1) se može napisati i kao

$$E_{1\text{tang}} = E_{2\text{tang}}; \quad (61.3)$$

dok granični uslov (61.2), u slučaju kada na razdvojnoj površi nema slobodnog naelektrisanja, postaje

$$D_{1\text{norm}} = D_{2\text{norm}}, \quad (61.4)$$

gde su sa 'tang' i 'norm' označene tangencijalne i normalne komponente odgovarajućih vektora, respektivno.

Ako su α_1 i α_2 uglovi između linija polja i normale na razdvojnu površ u prvoj i drugoj sredini, respektivno, onda je $\tan\alpha_1 = E_{1\text{tang}}/E_{1\text{norm}}$ i $\tan\alpha_2 = E_{2\text{tang}}/E_{2\text{norm}}$. Kako je, prema uslovu (61.4), $\epsilon_1 E_{1\text{norm}} = \epsilon_2 E_{2\text{norm}}$, kada se tangensi podele dobija se jednačina

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (61.5)$$

koja predstavlja pravilo prelamanja linija elektrostatičkog polja.

Radi ilustracije, preporučuje se čitaocu da nacrta linije električnog polja koje izlaze iz vode ($\epsilon_r = 80$) u vazduh, ako je upadni ugao (u vodi) $\alpha = 45°$.

62. Napisati granične uslove za razdvojnu površ provodnika i linearnog dielektrika. (*P951210*)

REŠENJE:
U odnosu na ort normale na razdvojnu površ, n, usmeren od provodnika ka dielektriku, traženi granični uslovi glase

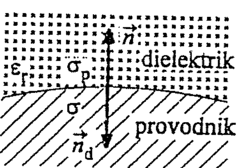
$$n \times E = 0 \quad (62.1)$$

i

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\,, \qquad (62.2)$$

gde je $\boldsymbol{E}$ vektor jačine električnog polja u dielektriku neposredno uz razdvojnu površ, σ gustina slobodnog površinskog naelektisanja na razdvojnoj površi, a ϵ permitivnost dielektrika u tačkama uz razdvojnu površ.

63. Izvesti vezu između gustina vezanog i slobodnog površinskog naelektrisanja na razdvojnoj površi provodnika i linearnog dielektrika. (*P960302*)



Slika 63.1.

REŠENJE:
Na slici 63.1 prikazan je detalj razdvojne površi provodnika i dielektrika, relativne permitivnosti ϵ_r. Prema toj slici, a na osnovu jednačina (51.1), (62.2), (53.7) i (55.1), kao i veze $\boldsymbol{n}_d = -\boldsymbol{n}$, dobija se sledeća relacija između površinskih gustina vezanog naelektrisanja, σ_p, i slobodnog naelektrisanja, σ, na razdvojnoj površi:

$$\sigma_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\sigma\,. \qquad (63.1)$$

64. Lopta poluprečnika $a = 100$ mm, od homogenog dielektrika relativne permitivnosti $\epsilon_r = 4$, nalazi se u vakuumu. Lopta je naelektrisana po svojoj zapremini naelektrisanjem čija gustina zavisi samo od odstojanja r od centra lopte i data je izrazom $\rho(r) = \rho_0 a/r$, gde je $\rho_0 = 1\ \mu\text{C/m}^3$. Izračunati potencijal centra lopte u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti. (*Z910409*)

$dQ = \rho dV = \rho_0 \cdot \frac{a}{r} \cdot 4r^2\pi$

REŠENJE:
Zbog simetrije, vektor električne indukcije, $\boldsymbol{D}$, ima samo radijalnu komponentu, koja zavisi samo od radijalnog odstojanja, r. Stoga se intenzitet toga vektora, $D(r)$, može odrediti primenom uopštenog Gausovog zakona (54.1), na sfernu površ poluprečnika r, postavljenu koncentrično sa dielektričnom loptom. Rezultat je

$D \cdot S = Q$

$$D(r) = \begin{cases} \rho_0 a/2 & \text{za } r \le a \\ \rho_0 a^3/(2r^2) & \text{za } r > a \end{cases}\,. \qquad (64.1)$$

Vektor jačine električnog polja je takođe radijalan, intenziteta $E(r) = D(r)/(\epsilon_r\epsilon_0)$ za $r \le a$, odnosno $E = D(r)/\epsilon_0$ za $r > a$. Potencijal centra lopte je

$$V = \int_0^\infty E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{\rho_0(1+\epsilon_r)a^2}{2\epsilon_r\epsilon_0} = 706\ \text{V}\,. \qquad (64.2)$$

Odredimo raspodelu vezanog naelektrisanja dielektrične lopte. Prema relaciji (56.2), gustina zapreminskog vezanog naelektrisanja je

$$\rho_p(r) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\rho(r) = -\frac{\rho_0(\epsilon_r - 1)a}{\epsilon_r r}\,. \qquad (64.3)$$

$D \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot a \cdot 4 \cdot \frac{r^2}{2}\pi \Rightarrow D = \frac{\rho_0 \cdot a}{2}$

Gustina površinskog vezanog naelektrisanja na površi lopte je, na osnovu jednačina (51.1), (53.7) i (55.1),

$$\sigma_p = P(a^-) = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}D(a^-) = \frac{\rho_0(\epsilon_r - 1)a}{2\epsilon_r}\,. \qquad (64.4)$$

65. Veoma dugačak cilindar, poluprečnika a, od homogenog dielektrika relativne permitivnosti ϵ_r, nalazi se u vakuumu. Cilindar je ravnomerno naelektrisan po svojoj zapremini naelektrisanjem gustine ρ. Odrediti izraz za vektor jačine električnog polja u cilindru i izvan njega. (*P900914*)

REZULTAT:
Traženi vektor jačine električnog polja je dat sledećim izrazima: $\boldsymbol{E}(r) = \rho r \boldsymbol{r}_0/(2\epsilon_r\epsilon_0)$, za $r \le a$, i $\boldsymbol{E}(r) = \rho a^2 \boldsymbol{r}_0/(2\epsilon_0 r)$, za $r > a$, gde je $\boldsymbol{r}_0$ cilindričan radijalni ort.

66. Sferični kondenzator, poluprečnika unutrašnje elektrode a i unutrašnjeg poluprečnika spoljašnje elektrode b ($b > a$), ispunjen je tečnim, savršenim dielektrikom, permitivnosti ϵ, i priključen na naponski generator stalne elektromotorne sile i unutrašnje otpornosti R. Pri tome je naelektrisanje unutrašnje elektrode kondenzatora Q. Ne isključujući kondenzator od izvora, dielektrik se istoči. Koliki je rad pri tome izvršila elektromotorna sila generatora? (*P940616*)

REŠENJE:
Pošto struja u kolu generatora u stacionarnim stanjima ne postoji (dielektrik kondenzatora je savršen), napon između elektroda kondenzatora, U_{ab}, jednak je (u oba stacionarna stanja) elektromotornoj sili generatora, E_g. Tako je

$$E_g = U_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}\,, \qquad (66.1)$$

gde su $Q_1 = Q$ i C_1, odnosno Q_2 i C_2, opterećenost i kapacitivnost kondenzatora u prvom, odnosno drugom, stacionarnom stanju, respektivno. Odatle je $E_g = (b-a)Q/(4\pi\epsilon ab)$. Kako je $C_2 = \epsilon_0 C_1/\epsilon$, to je $Q_2 = \epsilon_0 Q/\epsilon$.

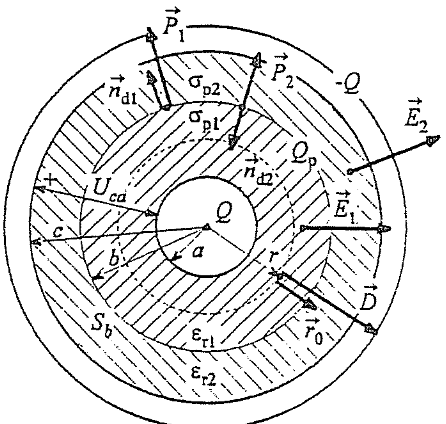
Između dva stacionarna stanja kroz generator je protekla količina elektriciteta $q = Q_2 - Q = -(\epsilon - \epsilon_0)Q/\epsilon$, u odnosu na referentni smer koji se poklapa sa referentnim smerom elektromotorne sile generatora. Konačno, izraz za rad koji je izvršila elektromotorna sila je

$$A_{E_g} = E_g q = -\frac{(\epsilon - \epsilon_0)(b-a)Q^2}{4\pi\epsilon^2 ab}\,. \qquad (66.2)$$

Kako je $A_{E_g} < 0$, zaključujemo da je pri istakanju dielektrika obavljen rad protiv elektromotorne sile generatora.

$Q = \int_0^a \rho_0 \frac{a}{r} \cdot 4r^2\pi\, dr = 4\rho_0 \cdot a\pi \cdot \frac{r^2}{2}$

67. Sferični kondenzator, poluprečnika unutrašnje elektrode $a = 5$ mm i unutrašnjeg poluprečnika spoljašnje elektrode $c = 15$ mm, ispunjen je sa dva koncentrična sloja dielektrika. Relativna permitivnost prvog sloja dielektrika (sloja uz unutrašnju elektrodu) je $\epsilon_{r1} = 4$, dok je relativna permitivnost drugog sloja dielektrika $\epsilon_{r2} = 2$. Poluprečnik razdvojne površi dva dielektrika je $b = 10$ mm. Kondenzator je opterećen tako da između spoljašnje i unutrašnje elektrode postoji napon $U_{ca} = 100$ V. Koliko je ukupno vezano naelektrisanje na razdvojoj površi dva dielektrika? (*Z961122*)



Slika 67.1.

REŠENJE:

Pretpostavimo da je naelektrisanje unutrašnje elektrode kondenzatora Q. Zbog simetrije, vektor električne indukcije u dielektriku je radijalan, a njegov intenzitet zavisi samo od radijalne sferične koordinate, r, tj.

$$D = D(r)\, r_0\,, \qquad (67.1)$$

gde je sa r_0 označen radijalan sferični ort (slika 67.1). Primenom uopštenog Gausovog zakona na sfernu površ poluprečnika r, sa centrom u koordinatnom početku O, zamišljenu bilo u prvom, bilo u drugom sloju dielektrika, dobijamo

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}\,, \qquad a < r < c\,. \qquad (67.2)$$

Vektor jačine električnog polja se sada dobija kao $E_1 = D/\epsilon_1$ u prvom sloju dielektrika, odnosno kao $E_2 = D/\epsilon_2$ u drugom sloju dielektrika.

Zadati napon između spoljašnje i unutrašnje elektrode kondenzatora je

$$U_{ca} = -U_{ac} = -\left[\int_a^b E_1(r)\,\mathrm{d}r + \int_b^c E_2(r)\,\mathrm{d}r\right] =$$

$$-\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\right]\,, \qquad (67.3)$$

odakle je

$$Q = -4\pi\epsilon_0 U_{ca}\left(\frac{b-a}{\epsilon_{r1}ab} + \frac{c-b}{\epsilon_{r2}bc}\right)^{-1} = -267\ \text{pC}\,. \qquad (67.4)$$

Gustina površinskog vezanog naelektrisanja na razdvojnoj površi dva dielektrika je

$$\sigma_p = \sigma_{p1} + \sigma_{p2}\,, \qquad (67.5)$$

gde je, na osnovu obrasca (51.1) i slike 67.1,

$$\sigma_{p1} = n_{d1} \cdot P_1(b^-) = P_1(b^-) = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} D(b)\,,$$

$$\sigma_{p2} = n_{d2} \cdot P_2(b^+) = -P_2(b^+) = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} D(b)\,. \qquad (67.6)$$

U gornjim izrazima, $P_1(r)$ i $P_2(r)$ su intenziteti vektora polarizacije u prvom i drugom sloju dielektrika, respektivno. Indukcija $D(b)$ se može dobiti iz (67.2). Konačno, ukupno vezano naelektrisanje na razdvojnoj površi dielektričnih slojeva iznosi

$$Q_p = \sigma_p S_b = \sigma_p 4\pi b^2 = \left(\frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} - \frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}}\right) Q = -66{,}75\ \text{pC}\,. \qquad (67.7)$$

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, upotrebom ekvivalentne električne šeme. Naime, razdvojna površ dva sloja dielektrika u kondenzatoru sa slike 67.1 je ekvipotencijalna, te se može metalizovati, tj. presvući vrlo tankim slojem provodnika.[3] Tako dobijeni sistem predstavlja rednu vezu dva sferična kondenzatora, pri čemu je svaki kondenzator ispunjen homogenim dielektrikom. Na taj način je

$$Q = -C_e U_{ca}\,, \qquad C_e = \frac{C_{ab} C_{cd}}{C_{ab} + C_{cd}}\,, \qquad (67.8)$$

gde je C_e kapacitivnost redne veze kondenzatora, a C_{ab} i C_{cd} su kapacitivnosti redno vezanih kondenzatora, koje se mogu dobiti iz izraza za kapacitivnost sferičnog kondenzatora sa homogenim dielektrikom. Tako se dobija rezultat za Q (67.4).

Na osnovu relacije (63.1), vezano naelektrisanje Q_{p1} uz spoljašnju elektrodu unutrašnjeg kondenzatora, opterećenu sa $-Q$, i vezano naelektrisanje Q_{p2} uz unutrašnju elektrodu spoljašnjeg kondenzatora, opterećenu sa Q, iznose

$$Q_{p1} = -\frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}}(-Q)\,, \qquad Q_{p2} = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} Q\,, \qquad (67.9)$$

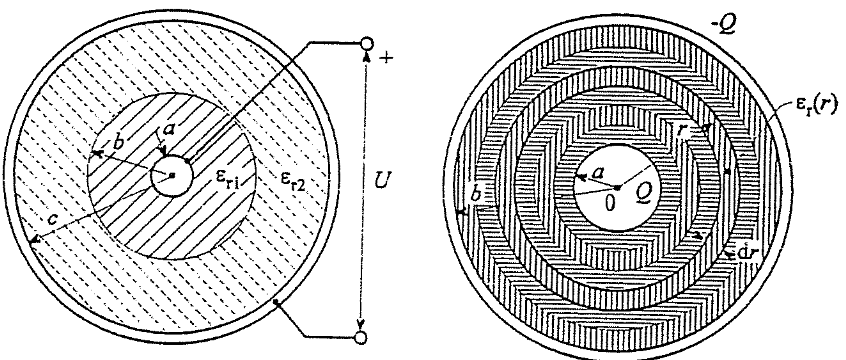
što u zbiru daje rezultat za Q_p (67.7).

68. Na slici 68.1 je prikazan poprečni presek sferičnog kondenzatora sa dva homogena linearna dielektrika, pri čemu je prvi dielektrik čvrst, relativne permitivnosti ϵ_{r1}, a drugi tečan, relativne permitivnosti ϵ_{r2}. Poznato je $a = 1{,}5$ mm, $b = 6$ mm i $c = 12$ mm. Kondenzator je priključen na stalan napon U. Kada je iz ovoga kondenzatora, kroz rupicu na spoljašnjoj elektrodi, ispušten drugi, tečni

[3] Elektrostatičko polje se ne menja ako se normalno na linije polja postavi metalna folija.

dielektrik, jačina električnog polja uz unutrašnju elektrodu se smanjila za trećinu, a jačina električnog polja uz spoljašnju elektrodu se udvostručila. Odrediti ϵ_{r1} i ϵ_{r2}. (*Z950127*)

REZULTAT:
Relativne permitivnosti dielektrika su $\epsilon_{r1} = 6$ i $\epsilon_{r2} = 3$.



Slika 68.1.

Slika 69.1.

(69.) Sferični kondenzator, poluprečnika provodnika a i b ($a < b$), ima nehomogen dielektrik, čija relativna permitivnost zavisi samo od odstojanja r od centra kondenzatora i data je izrazom $\epsilon_r(r) = 2b/r$. Odrediti izraz za kapacitivnost ovoga kondenzatora. (*Z900202*)

REŠENJE:
Izdelimo dielektrik kondenzatora na tanke sferne slojeve, poluprečnika r i debljine dr, $a < r < b$ (slika 69.1). Svaki sloj se može smatrati homogenim, relativne permitivnosti $\epsilon_r(r)$. Sada je očigledno da zadati kondenzator predstavlja generalizaciju kondenzatora sa slike 67.1, koji ima dva takva sloja dielektrika. Stoga je način promene vektora D i E u kondenzatorima sa slika 69.1 i 67.1 isti.

Vektor električne indukcije u dielektriku, D, dat je u jednačinama (67.1) i (67.2), a vektor jačine električnog polja je $E = D/[\epsilon_r(r)\epsilon_0]$. Napon između elektroda kondenzatora sada iznosi

$$U = \int_a^b E(r)\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2\epsilon_r(r)}\,, \tag{69.1}$$

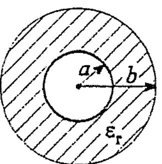
te je kapacitivnost kondenzatora

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0\left[\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r^2\epsilon_r(r)}\right]^{-1}\,. \tag{69.2}$$

Uvrštavanjem datog izraza za funkciju $\epsilon_r(r)$ i integracijom, dobijamo $C = 8\pi\epsilon_0 b/\ln(b/a)$.

(70.) Metalna lopta, poluprečnika $a = 100$ mm, okružena je koncentričnim slojem homogenog dielektrika, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 4$, a ostatak prostora je ispunjen vazduhom, kao što je prikazano na slici 70.1. Potencijal lopte u odnosu na veoma udaljene tačke je $V = 100$ kV. (a) Koliki treba da bude spoljašnji poluprečnik dielektrika, b, da bi električna energija u dielektriku iznosila tačno jednu polovinu ukupne električne energije sistema? (b) Kolika je tada ukupna energija sistema? (*Z930831*)

REŠENJE:
(a) Metalizovanjem ekvipotencijalne površi $r = b$ dobijamo dva sferična kondenzatora, jedan ispunjen dielektrikom relativne permitivnosti ϵ_r, a drugi vazdušni. Opterećenost svakoga kondenzatora jednaka je naelektrisanju lopte, Q. Po uslovu zadatka, energije ovih kondenzatora su jednake, $W_{e1} = W_{e2}$, tj.



Slika 70.1.

$$\frac{Q^2}{2C_1} = \frac{Q^2}{2C_2}\,, \tag{70.1}$$

odakle sledi da su njihove kapacitivnosti jednake, $C_1 = C_2$. Tako, na osnovu izraza za kapacitivnosti sferičnih kondenzatora, poluprečnika elektroda a i b, odnosno b i $c \to \infty$, imamo

$$\frac{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 ab}{b-a} = 4\pi\epsilon_0 b\,, \tag{70.2}$$

odakle je $b = (\epsilon_r + 1)a = 500$ mm.

(b) Ukupna energija sistema je

$$W_e = \frac{C_e V^2}{2} = 0,139\ \mathrm{J}\,, \tag{70.3}$$

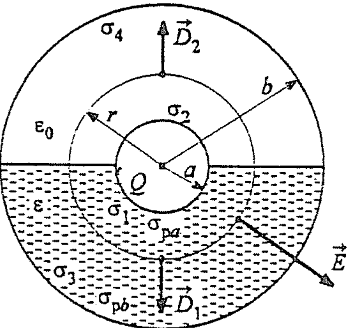
gde je C_e ekvivalentna kapacitivnost redne veze kondenzatora.

Preporučuje se čitaocu da reši zadatak i računanjem energije preko polja, tj. zapreminskom integracijom gustine energije.

(71.) Sferični kondenzator, poluprečnika provodnika $a = 5$ cm i $b = 20$ cm, sa vazdušnim dielektrikom, priključen je na izvor napona $U_{ab} = 10$ kV. Po uspostavljanju stacionarnog stanja, kondenzator je odvojen od izvora, a u prostor između elektroda kondenzatora uliven je tečni dielektrik, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 4$, tako da ispunjava polovinu prostora između elektroda. Odrediti raspodelu slobodnih i vezanih naelektrisanja kondenzatora u ovom drugom slučaju. (*Z891014*)

REŠENJE:

Kapacitivnost kondenzatora u prvom stacionarnom stanju je $C_0 = 4\pi\epsilon_0 ab/(b-a) = 7,42$ pF. Opterećenost kondenzatora je $Q = C_0 U_{ab} = 74,2$ nC. Naelektrisanja elektroda kondenzatora ostaju ista i posle odvajanja kondenzatora od izvora i njegovog punjenja tečnim dielektrikom.



Slika 71.1.

U drugom stacionarnom stanju (slika 71.1) električno polje je, zbog simetrije, radijalno. Na osnovu graničnog uslova za vektor jačine električnog polja (61.3), intenzitet toga vektora zavisi samo od radijalne sferične koordinate, r, tj. isti je u svim tačkama sfere poluprečnika r ($a < r < b$). Drugim rečima, vektor E između elektroda kondenzatora je oblika datog u (18.2).

Što se tiče vektora električne indukcije, u dielektriku je $D_1 = \epsilon_r\epsilon_0 E$, dok je u vazduhu $D_2 = \epsilon_0 E$. Primenom uopštenog Gausovog zakona na sferu poluprečnika r ($a < r < b$), dobija se jednačina

$$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = Q\,, \tag{71.1}$$

odnosno,

$$(\epsilon_r + 1)\epsilon_0 E 2\pi r^2 = Q\,, \tag{71.2}$$

odakle je

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_r + 1)\epsilon_0 r^2}\,. \tag{71.3}$$

Slobodnog naelektrisanja ima samo na površima elektroda. Površinske gustine slobodnog naelektrisanja se dobijaju primenom relacije (62.2) i, prema oznakama na slici 71.1, iznose

$$\sigma_1 = \epsilon_r\epsilon_0 E(a^+) = 3,78\ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}\,, \qquad \sigma_2 = \epsilon_0 E(a^+) = 944\ \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}\,,$$

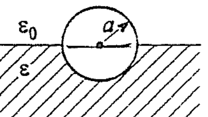
$$\sigma_3 = -\epsilon_r\epsilon_0 E(b^-) = -236\ \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}\,, \qquad \sigma_4 = -\epsilon_0 E(b^-) = -59\ \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}\,. \tag{71.4}$$

Vezanih nalektrisanja nema na razdvojnoj površi tečnosti i vazduha (jer je električno polje tangentno na tu površ), a nema ih ni na razdvojnoj površi vazduha i metalnih elektroda (jer u vazduhu nema polarizacije). Na površima tečnosti uz unutrašnju i spoljašnju elektrodu kondenzatora, površinske gustine vezanog naelektrisanja su, na osnovu veze (63.1), redom,

$$\sigma_{pa} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\sigma_1 = -2,83\ \frac{\mu\text{C}}{\text{m}^2}\,, \qquad \sigma_{pb} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\sigma_3 = 177\ \frac{\text{nC}}{\text{m}^2}\,. \tag{71.5}$$

Preporučuje se čitaocu da izračuna kapacitivnost kondenzatora u drugom stacionarnom stanju i priraštaj električne energije kondenzatora, ΔW_e, od trenutka odvajanja kondenzatora od izvora do uspostavljanja stacionarnog stanja u kondenzatoru sa ulivenim tečnim dielektrikom.

72. Metalna lopta, poluprečnika a, do polovine je potopljena u tečni dielektrik, relativne permitivnosti ϵ_r, kao što je prikazano na slici 72.1. Naelektrisanje lopte je Q. Koliki je potencijal lopte u odnosu na referentnu tačku u beskonačnosti? (*Z910122*)



Slika 72.1.

REZULTAT:
Potencijal lopte je

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r + 1)\,a}\,. \tag{72.1}$$

- паралелна веза два полусферична кондензатора

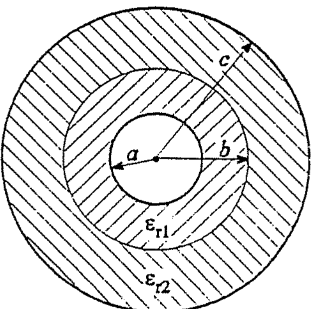
73. Koaksijalni kabl, čiji je poprečni presek prikazan na slici 73.1, ima dvoslojni dielektrik. Dimenzije poprečnog preseka kabla su $a = 2$ mm, $b = 4$ mm i $c = 8$ mm, relativne permitivnosti dielektrika su $\epsilon_{r1} = 3$ i $\epsilon_{r2} = 4,5$, a napon između unutrašnjeg provodnika i razdvojne površi dielektrika je $U_{ab} = 1000$ V. (a) Izračunati podužnu kapacitivnost kabla. (b) Odrediti raspodelu vezanih naelektrisanja kabla. (*Z900124*)

REZULTAT:
Tražene veličine su $C' = 144,3$ pF/m, $\rho_p = 0$, $\sigma_{pa} = -12,76\ \mu\text{C/m}^2$, $\sigma_{pb} = -1,06\ \mu\text{C/m}^2$ i $\sigma_{pc} = 3,72\ \mu\text{C/m}^2$.

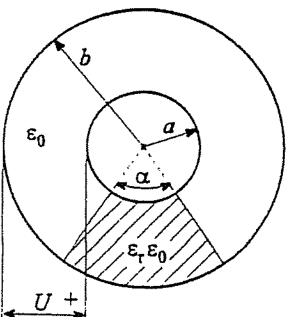
74. Između provodnika koaksijalnog kabla, poluprečnika a i b ($a < b$), nalazi se nehomogen dielektrik, čija se permitivnost može opisati izrazom $\epsilon(r) = \epsilon(b)b/r$, $r \in (a, b)$, pri čemu je r odstojanje posmatrane tačke od ose kabla. Odrediti izraz za podužnu kapacitivnost kabla. (*P950123*)

REZULTAT:
Izraz za traženu podužnu kapacitivnost je $C' = 2\pi\epsilon(b)b/(b-a)$.

75. Na slici 75.1 je prikazan poprečni presek veoma dugačkog otvorenog koaksijalnog kabla. Poznati su: stalan napon U između provodnika kabla, poluprečnici provodnika kabla a i b ($a < b$) i relativna permitivnost dielektričnog podmetača ϵ_r. Odrediti: (a) ugao α tako da električna energija lokalizovana u podmetaču bude jednaka polovini električne energije lokalizovane u kablu, i (2) podužnu gustinu električne energije kabla. (*Z950406*)



Slika 73.1.



Slika 75.1.

REŠENJE:
Vektor E između provodnika kabla je radijalan, intenziteta

$$E(r)=\frac{U}{r\ln\frac{b}{a}} . \qquad (75.1)$$

Gustine električne energije u dielektričnom podmetaču i u vazdušnom delu unutrašnjosti kabla su, redom,

$$w_{e1}=\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0E^2 , \qquad w_{e2}=\frac{1}{2}\epsilon_0E^2 . \qquad (75.2)$$

Po uslovu zadatka, podužne gustine energija u podmetaču i u ostatku prostora između provodnika kabla su jednake, $W'_{e1}=W'_{e2}$, tj.

$$\int_{r=a}^{b}\underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_r\epsilon_0E(r)^2}_{w_{e1}}\underbrace{\alpha r\,dr}_{dS_1}=\int_{r=a}^{b}\underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0E(r)^2}_{w_{e2}}\underbrace{(2\pi-\alpha)r\,dr}_{dS_2} , \qquad (75.3)$$

pri čemu su dS_1 i dS_2 površine delova tankog kružnog prstena, poluprečnika r i debljine dr, koji se iz centra kruga vide pod uglovima α i $2\pi-\alpha$, respektivno. I bez integracije, iz jednačine (75.3) sledi

$$\epsilon_r\alpha=2\pi-\alpha , \qquad (75.4)$$

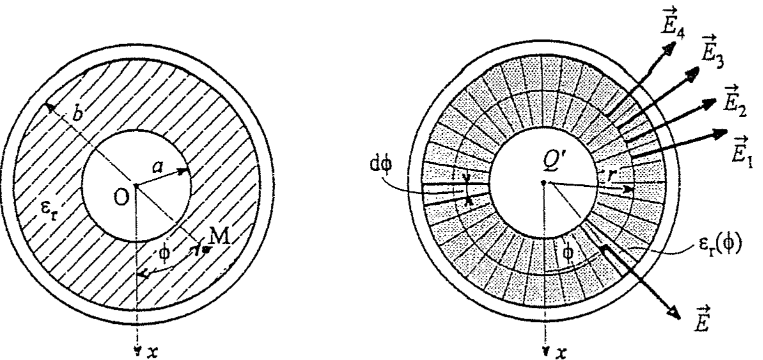
tj. $\alpha=2\pi/(\epsilon_r+1)$.

Podužna gustina energije kabla je $W'_e=2W'_{e1}$, pri čemu se W'_{e1} dobija rešavanjem integrala na levoj strani znaka jednakosti u jednačini (75.3). Konačno,

$$W'_e=\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_rU^2}{(\epsilon_r+1)\ln\frac{b}{a}} . \qquad (75.5)$$

Preporuke čitaocu:
- Izvesti izraz za podužnu kapacitivnost kabla sa slike 75.1.
- Rešiti zadatak preko kapacitivnosti, na način analogan onome u rešenju zadatka 70.

76. Na slici 76.1 je prikazan poprečni presek veoma dugačkog koaksijalnog kabla, poluprečnika provodnika a i b, sa nehomogenim dielektrikom, čija se relativna permitivnost može opisati izrazom $\epsilon_r(\phi)=1+|k\sin\phi|$, $\phi\in[0,2\pi]$. Odrediti konstantu k tako da podužna kapacitivnost ovakvoga kabla bude k puta veća od podužne kapacitivnosti koaksijalnog kabla istih dimenzija sa vazdušnim dielektrikom. (Z940620)



Slika 76.1. Slika 76.2.

REŠENJE:
Izdelimo dielektrik kondenzatora na tanke sektore ("režnjeve") čija je mera elementarni cirkularni ugao $d\phi$ (slika 76.2). Svaki takav sektor se može smatrati homogenim, relativne permitivnosti $\epsilon_r(\phi)$. Na taj način, očigledno je da su, što se tiče oblika raspodele polja, nehomogenosti dielektrika kablova sa slika 75.1 i 76.1 istoga tipa.

Zbog simetrije, vektor jačine električnog polja u dielektriku je radijalan, a kako na osnovu graničnog uslova (61.3) imamo $E_1=E_2$, $E_2=E_3$, $E_3=E_4$, ... (videti sliku 76.2), njegov intenzitet je konstantan na cilindričnoj površi poluprečnika r. Drugim rečima, električno polje u dielektriku je sledećeg oblika:

$$E=E(r)\,r_0 , \qquad (76.1)$$

gde je r_0 radijalan cilindrični ort. Vektor električne indukcije je $D=\epsilon_r(\phi)\epsilon_0E$.

Primenom uopštenog Gausovog zakona na cilindar poluprečnika r $(a<r<b)$ i visine h, dobijamo sledeću jednačinu:

$$\int_{\phi=0}^{2\pi}\underbrace{\epsilon_r(\phi)\epsilon_0E(r)}_{D}\underbrace{r\,d\phi h}_{dS}=\underbrace{Q'h}_{Q_S} , \qquad (76.2)$$

gde je dS površina elementarne trake, širine $r\,d\phi$ i visine h, a Q' je podužno naelektrisanje unutrašnjeg provodnika kabla. Iz jednačine (76.2) sledi

$$E(r)=\frac{Q'}{r\epsilon_0\int_0^{2\pi}\epsilon_r(\phi)\,d\phi} . \qquad (76.3)$$

Napon između provodnika kabla je

$$U = \int_{r=a}^{b} E(r)dr = \frac{Q' \ln \frac{b}{a}}{\epsilon_0 \int_0^{2\pi} \epsilon_r(\phi)\,d\phi}, \qquad (76.4)$$

pa je podužna kapacitivnost kabla

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{\epsilon_0 \int_0^{2\pi} \epsilon_r(\phi)\,d\phi}{\ln \frac{b}{a}}. \qquad (76.5)$$

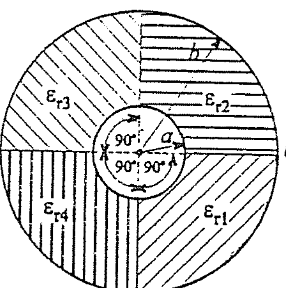
Po uslovu zadatka,

$$C' = kC'_0, \qquad (76.6)$$

gde je C'_0 podužna kapacitivnost kabla sa vazdušnim dielektrikom, odakle zaključujemo da je $k > 0$. Stoga je funkcija $k \sin\phi$, koja figuriše u izrazu za relativnu permitivnost dielektrika kabla, pozitivna za $\phi \in (0, \pi)$, a negativna za $\phi \in (\pi, 2\pi)$. Tako se uslov (76.6) svodi na sledeću jednačinu:

$$\int_0^{\pi} (1 + k\sin\phi)\,d\phi + \int_{\pi}^{2\pi} (1 - k\sin\phi)\,d\phi = 2\pi k, \qquad (76.7)$$

odnosno, $2\pi + 4k = 2\pi k$, odakle je $k = \pi/(\pi - 2) \approx 2,75$.



Slika 77.1.

77. Dat je veoma dugačak koaksijalni kabl poluprečnika unutrašnjeg provodnika $a = 1$ mm i unutrašnjeg poluprečnika spoljašnjeg provodnika $b = 3,6$ mm. Kabl je ispunjen nehomogenim dielektrikom sastavljenim od četiri homogena dela, kao što je prikazano na slici 77.1. Relativne permitivnosti delova su $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = 1$, $\epsilon_{r3} = 8$ i $\epsilon_{r4} = 4$. Napon između unutrašnjeg i spoljašnjeg provodnika kabla je $U = 30$ V i vremenski je nepromenljiv. Odrediti: (a) Vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački dielektrika, (b) gustinu slobodnog naelektrisanja u proizvoljnoj tački na površi unutrašnjeg provodnika, (c) podužnu gustinu energije kabla i (d) podužnu kapacitivnost kabla. (*Z951210*)

REŠENJE:

Relativna permitivnost dielektrika je sledeća funkcija cirkularnog ugla ϕ ($\phi \in [0, 2\pi]$):

$$\epsilon_r(\phi) = \begin{cases} \epsilon_{r1} & \text{za } \phi \in [0, \pi/2) \\ \epsilon_{r2} & \text{za } \phi \in [\pi/2, \pi) \\ \epsilon_{r3} & \text{za } \phi \in [\pi, 3\pi/2) \\ \epsilon_{r4} & \text{za } \phi \in [3\pi/2, 2\pi) \end{cases} \qquad (77.1)$$

pri čemu ugao ϕ raste u matematički pozitivnom smeru na slici 77.1 (smeru suprotnom smeru kretanja kazaljke na časovniku), a $\phi = 0$ na razdvojnoj površi četvrtog i prvog dela dielektrika.

(a) Vektor jačine električnog polja u proizvoljnoj tački dielektrika je radijalan, intenziteta datog izrazom (75.1), gde je r radijalno odstojanje tačke od ose kabla. $E(r) = \frac{U}{r \ln b/a}$

(b) Gustina slobodnog naelektrisanja u proizvoljnoj tački na površi unutrašnjeg provodnika dobija se na osnovu relacije (62.2), i iznosi $\sigma = E \cdot \varepsilon$

$$\sigma(\phi) = D(a^+, \phi) = \epsilon_r(\phi)\epsilon_0 E(a^+) = \begin{cases} 414,7\ \text{nC/m}^2 & \text{za } \phi \in [0, \pi/2) \\ 207,3\ \text{nC/m}^2 & \text{za } \phi \in [\pi/2, \pi) \\ 1,66\ \mu\text{C/m}^2 & \text{za } \phi \in [\pi, 3\pi/2) \\ 829,5\ \text{nC/m}^2 & \text{za } \phi \in [3\pi/2, 2\pi) \end{cases} \qquad (77.2)$$

Густине наелектрисања су различите, при различитим диелектрицима.

(c)-(d) Prema izrazu (76.5), podužna kapacitivnost kabla je

$$C' = \frac{\pi(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2} + \epsilon_{r3} + \epsilon_{r4})\epsilon_0}{2 \ln \frac{b}{a}} = 162,9\ \frac{\text{pF}}{\text{m}}, \qquad (77.3)$$

— Паралелна веза четири кондензатора

pa je podužna gustina energije kabla $W'_e = C'U^2/2 = 73,3$ nJ/m.

78. Koaksijalni kondenzator leži horizontalno (po dužini) i ispunjen je do polovine tečnim dielektrikom, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 5$. Kondenzator je priključen na stalan napon $U = 80$ V, pa odvojen od izvora. Potom je uspravljen u vertikalan položaj. Konačno, kroz mali otvor pri dnu kondenzatora iscuri pola dielektrika. Odrediti napon kondenzatora (a) nakon uspravljanja u vertikalan položaj i (b) pošto iscuri pola dielektrika. Efekti krajeva se mogu zanemariti. (*Z960920*)

REZULTAT:

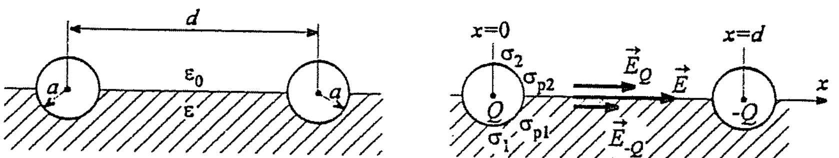
Naponi kondenzatora su: (a) $U' = U = 80$ V i (b) $U'' = 2(\epsilon_r+1)U/(\epsilon_r+3) = 120$ V.

79. Dve metalne kugle, svaka poluprečnika a, nalaze se do polovine u dielektriku relativne permitivnosti ϵ_r, kao na slici 79.1. Međusobno odstojanje centara kugli je d, $d \gg a$. Gornja sredina je vazduh. (a) Odrediti izraz za kapacitivnost ovakvog kondenzatora. (b) Ako se kondenzator priključi na generator stalnog napona U, odrediti raspodele slobodnog i vezanog naelektrisanja u kondenzatoru. (*Z960204*)

REŠENJE:

(a) Pretpostavimo da su kugle opterećene naelektrisanjima Q i $-Q$ (slika 79.2). Vektor jačine električnog polja, $\boldsymbol{E}$, se, po principu superpozicije, može odrediti kao

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_Q + \boldsymbol{E}_{-Q}. \qquad (79.1)$$



Slika 79.1. Slika 79.2.

Pošto su, prema uslovu zadatka, kugle male u odnosu na odstojanje njihovih centara, prilikom određivanja polja E_Q smatraćemo da druga, u tome slučaju nenaelektrisana, kugla ne postoji. Slično kod određivanja polja E_{-Q}. Prema tome, parcijalna polja se određuju u sistemu sa slike 72.1. U tome sistemu, polje E_Q u proizvoljnoj tački prostora je radijalno, a njegov intenzitet je dat izrazom (71.3).

Napon između leve i desne kugle je, prema slici 79.2,

$$U = \int_{x=a}^{d-a} (E_Q + E_{-Q})\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_r+1)} \int_a^{d-a} \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(d-x)^2}\right] \mathrm{d}x \approx \frac{Q}{\pi\epsilon_0(\epsilon_r+1)\,a}\,, \qquad (79.2)$$

odakle je kapacitivnost kondenzatora

$$C = \pi\epsilon_0(\epsilon_r+1)\,a\,. \qquad (79.3)$$

(b) Gustine slobodnog naelektrisanja na površi leve kugle su, prema oznakama na slici 79.2,

$$\sigma_1 = \epsilon_r\epsilon_0 E_Q(a^+) = \frac{\epsilon_r\epsilon_0 U}{2a}\,, \qquad \sigma_2 = \epsilon_0 E_Q(a^+) = \frac{\epsilon_0 U}{2a}\,, \qquad (79.4)$$

a odgovarajuće gustine vezanog nalektrisanja

$$\sigma_{p1} = -(\epsilon_r - 1)\epsilon_0 E_Q(a^+) = -\frac{(\epsilon_r-1)\epsilon_0 U}{2a}\,, \qquad \sigma_{p2} = 0\,, \qquad (79.5)$$

pri čemu je uzeto $E \approx E_Q$ u tačkama uz površ leve kugle. Odgovarajuće gustine naelektrisanja za desnu elektrodu dobijaju se množenjem gornjih izraza sa -1. Na razdvojnoj površi dielektrika i vazduha nema vezanog naelektrisanja.

Da li se izraz za kapacitivnost kondenzatora sa slike 79.1 može dobiti korišćenjem izraza za kapacitivnost metalne kugle sa slike 72.1? Odgovor obrazložiti.

80. Provodnici tankog vazdušnog dvožičnog voda, rastojanja osa provodnika d i poluprečnika provodnika a ($a \ll d$), presvučeni su tankim slojem dielektrika, permitivnosti ϵ i debljine a. Odrediti izraz za podužnu kapacitivnost voda. (*Z900612*)

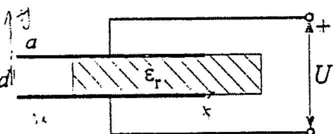
REZULTAT:
Podužna kapacitivnost voda je $C' = \pi\left[\ln 2/\epsilon + \ln(d/2a)/\epsilon_0\right]^{-1}$.

81. Pločasti kondenzator, površine elektroda S i odstojanja između njih d, ima homogen, savršeni dielektrik, relativne permitivnosti ϵ_r. Kondenzator se priključi na generator stalnog napona U. Po uspostavljanju stacionarnog stanja, kondenzator se odvoji od generatora, a dielektrik se izvuče tako da elektrode zadrže svoj međusoban položaj. Kolika je energija kondenzatora po izvlačenju dielektrika? Ivični efekti se mogu zanemariti. (*P950614*)

REZULTAT:
Energija kondenzatora je $W_e = \epsilon_r^2\epsilon_0 S U^2/(2d)$.

82. Elektrode pločastog kondenzatora, čiji je poprečni presek prikazan na slici 82.1, imaju oblik kvadrata, stranice a, a odstojanje između njih je d ($d \ll a$). Kondenzator je priključen na stalan napon U, a između elektroda je ubačena, celom širinom, dielektrična ploča, relativne permitivnosti ϵ_r, tako da je deo prostora između elektroda kondenzatora ispunjen dielektrikom, a ostatak vazduhom. Izračunati elektrostatičku silu koja deluje na dielektričnu ploču. (*P940829*)

REŠENJE:
Uvedimo x-osu koja definiše položaj leve strane dielektrika u odnosu na levi kraj kondenzatora (x je dužina vazdušnog dela prostora između elektroda kondenzatora, x-osa je usmerena nadesno). Na osnovu formule za kapacitivnost paralelne veze kondenzatora, kapacitivnost kondenzatora sa slike 82.1 je



Slika 82.1.

$$C = \epsilon_0 \frac{ax}{d} + \epsilon_r\epsilon_0 \frac{a(a-x)}{d}\,, \qquad (82.1)$$

pri čemu su zanemareni ivični efekti ($d \ll a$). Energija kondenzatora je $W_e = CU^2/2$. Primenom metode virtualnih radova, uz uslov da je napon U konstantan [videti (35.6)], dobija se x-komponenta električne sile na dielektrik

$$F_x = \frac{\mathrm{d}W_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{(\epsilon_r-1)\epsilon_0 a U^2}{2d}\,. \qquad (82.2)$$

Kako je $F_x < 0$, električna sila, $F = F_x i$, teži da uvuče dielektrik.

Preporučuje se čitaocu da zadatak reši i primenom druge varijante metode virtualnih radova, smatrajući da, prilikom zamišljenog pomeraja ploče, opterećenost kondenzatora ostaje nepromenjena.

83. Poluprečnici elektroda sferičnog kondenzatora su $a = 50$ mm i $c = 150$ mm. Dielektrik kondenzatora se sastoji od dva koncentrična sloja. Relativna permitivnost unutrašnjeg dielektrika je $\epsilon_{r1} = 4$, a električna čvrstina $E_{kr1} = 300$ kV/cm. Relativna permitivnost spoljašnjeg dielektrika je $\epsilon_{r2} = 3$, a električna čvrstina $E_{kr2} = 200$ kV/cm. Poluprečnik razdvojne površi slojeva je $b = 100$ mm.

Izračunati napon između elektroda kondenzatora pri kome dolazi do proboja dielektrika. (*Z920125*)

REŠENJE:
Pretpostavimo da je opterećenost kondenzatora Q. Vektor električne indukcije u dielektriku kondenzatora je dat jednačinama (67.1) i (67.2). Jačine električnog polja u pojedinim slojevima dielektrika su (slika 83.1)

$$E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 r^2} = E_1(a^+)\frac{a^2}{r^2}, \quad a < r < b, \tag{83.1}$$

$$E_2(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0 r^2} = E_2(b^+)\frac{b^2}{r^2}, \quad b < r < c, \tag{83.2}$$

gde je r radijalna sferična koordinata.

Slika 83.1.

Kombinovanjem jednačina (83.1) i (83.2) dobijamo

$$\epsilon_{r1}a^2E_1(a^+) = \epsilon_{r2}b^2E_2(b^+). \tag{83.3}$$

Pretpostavimo da do eventualnog poboja dolazi u unutrašnjem dielektriku. Pošto je polje u tome dielektriku najjače za $r = a^+$, tada je

$$E_1(a^+) = E_{kr1} \tag{83.4}$$

i, na osnovu veze (83.3), $E_2(b^+) = E_{kr1}\epsilon_{r1}a^2/(\epsilon_{r2}b^2) = 100$ kV/cm. Kako je $E_2(b^+) < E_{kr2}$, u trenutku pretpostavljenog proboja unutrašnjeg dielektrika polje u svakoj tački spoljašnjeg dielektrika je manje jačine od kritične za taj dielektrik. To znači da je učinjena pretpostavka tačna. [Pretpostavka da do proboja može doći u spoljašnjem dielektriku, kada je (u tačkama maksimalne jačine polja u tome dielektriku)

$$E_2(b^+) = E_{kr2}, \tag{83.5}$$

ima nemoguću posledicu: $E_1(a^+) > E_{kr1}$.]

Napon između elektroda kondenzatora pri kome dolazi do proboja dielektrika je, sada,

$$U_{kr} = E_1(a^+)a^2\int_a^b \frac{dr}{r^2} + E_2(b^+)b^2\int_b^c \frac{dr}{r^2} =$$

$$\epsilon_{r1}a^2E_{kr1}\left(\frac{b-a}{\epsilon_{r1}ab} + \frac{c-b}{\epsilon_{r2}bc}\right) = 1,083\ \text{MV}. \tag{83.6}$$

Probojni napon kondenzatora se može odrediti i na sledeći način. Označimo sa $Q_{kr}^{(1)}$ i $Q_{kr}^{(2)}$ opterećenosti kondenzatora u slučajevima eventualnog proboja

unutrašnjeg, odnosno spoljašnjeg dielektrika, respektivno. Na osnovu jednačina (83.1), (83.2), (83.4) i (83.5),

$$Q_{kr}^{(1)} = 4\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 a^2E_{kr1}, \qquad Q_{kr}^{(2)} = 4\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0 b^2E_{kr2}. \tag{83.7}$$

Prilikom povećavanja opterećenosti kondenzatora, do proboja će doći kada ona iznosi

$$Q_{kr} = \min\{Q_{kr}^{(1)}, Q_{kr}^{(2)}\}. \tag{83.8}$$

Prema zadatim brojnim podacima, $Q_{kr}^{(1)} < Q_{kr}^{(2)}$, pa je $Q_{kr} = Q_{kr}^{(1)} = 33,38\ \mu$C (do proboja dolazi u unutrašnjem dielektriku).

Probojni napon kondenzatora je $U_{kr} = Q_{kr}/C = 1,083$ MV, gde je $C = 30,81$ pF kapacitivnost kondenzatora.

84. Poluprečnik unutrašnje elektrode sferičnog kondenzatora je $a = 1$ cm, a unutrašnji poluprečnik spoljašnje elektrode je $b = 5/3$ cm. Oko unutrašnje elektrode nalazi se dielektrik, permitivnosti $\epsilon = 5\epsilon_0$ i debljine $d = 0,5$ cm. Prostor između dielektrika i spoljašnje elektrode je ispunjen vazduhom. Električne čvrstine dielektrika i vazduha su $E_{kr} = 60$ kV/cm i $E_{kr0} = 30$ kV/cm, respektivno. Koliki je najveći napon na koji sme da se priključi ovaj kondenzator? (*P960130*)

REZULTAT:
Probojni napon ovoga kondenzatora je $U_{kr} = 9$ kV.

85. Šuplja metalna lopta, spoljašnjeg poluprečnika $a = 5$ cm, nalazi se do svoje polovine u tečnom dielektriku, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 4$ i dielektrične čvrstoće $E_{kr} = 100$ kV/cm. Odrediti najveći potencijal do koga se ova lopta može dovesti kada pliva u dielektriku, tako da posle vađenja lopte i podizanja visoko iznad dielektrika ne dođe do proboja. Dielektrična čvrstoća vazduha je $E_{kr0} = 30$ kV/cm. (*Z940126*)

REŠENJE:
Označimo traženi potencijal lopte sa V_{kr}. Odgovarajuće naelektrisanje lopte je, prema relaciji (72.1),

$$Q_{kr} = 2\pi\epsilon_0(\epsilon_r + 1)aV_{kr}. \tag{85.1}$$

To naelektrisanje ostaje isto i nakon podizanja lopte iznad dielektrika. Po uslovu zadatka ono je određeno probojem u tom stacionarnom stanju,

$$Q_{kr} = 4\pi\epsilon_0 a^2E_{kr0} \tag{85.2}$$

[videti (83.7)]. Kombinovanjem jednačina (85.1) i (85.2), dobijamo

$$V_{kr} = \frac{2aE_{kr0}}{\epsilon_r + 1} = 60\ \text{kV}. \tag{85.3}$$

Potrebno je još proveriti da li je sistem u prvom stacionarnom stanju bezbedan od proboja. Očigledno jeste, pošto je odnos polja uz površ metalne lopte u sistemu sa slike 72.1, $E'(a^+)$, i polja uz površ metalne lopte u vazduhu, $E''(a^+)$, pri istom naelektrisanju lopte, dat sa

$$\frac{E'(a^+)}{E''(a^+)} = \frac{2}{\epsilon_r + 1} < 1 \qquad (85.4)$$

[videti izraz (71.3)].

(86) Oko usamljene metalne kugle, poluprečnika $a = 3$ cm, nalazi se homogeni dielektrik debljine $d = 6$ cm, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 3$ i dielektrične čvrstoće $E_{kr} = 100$ kV/cm. Dielektrična čvrstoća vazduha je $E_{kr0} = 30$ kV/cm. (a) Kolike su površinske gustine slobodnog i vezanog naelektrisanja kugle i dielektrika, ako se kugla dovede na potencijal $V = 375$ V? (b) Koliki je maksimalni potencijal metalne kugle, a da pri tome ni u jednoj tački ne dođe do proboja? (*Z930216*)

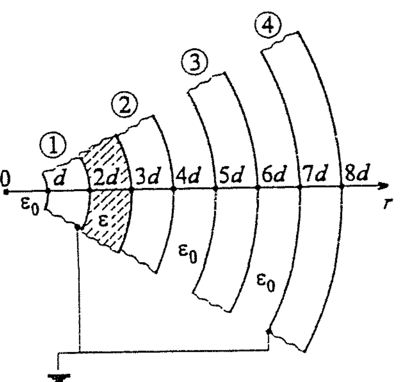
REZULTAT:
(a) Gustina slobodnog naelektrisanja na površi metalne kugle je $\sigma = 198,9$ nC/m^2. Gustine vezanog naelektrisanja na unutrašnjoj i spoljašnjoj površi dielektrika su $\sigma_{p1} = -132,6$ nC/m^2 i $\sigma_{p2} = 14,74$ nC/m^2, respektivno. (b) $V_{kr} = 450$ kV.

87. Četiri šuplje metalne lopte, svaka debljine $d = 1$ cm, postavljene su koncentrično jedna drugoj. Unutrašnji poluprečnik najmanje, prve lopte je $d = 1$ cm. Prva i četvrta lopta su uzemljene, kao što je prikazano na detalju preseka ovoga sistema, na slici 87.1. Između prve i druge lopte se nalazi homogeni dielektrik, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 5$ i dielektrične čvrstoće $E_{kr} = 100$ kV/cm, a između ostalih lopti je vazduh, dielektrične čvrstoće $E_{kr0} = 30$ kV/cm. Naelektrisanje druge lopte je $Q = 0,52\ \mu$C. Odrediti u kome opsegu može da se nalazi potencijal V treće lopte, u odnosu na zemlju, tako da ni u jednoj tački ovoga sistema ne dođe do proboja. (*Z940121*)

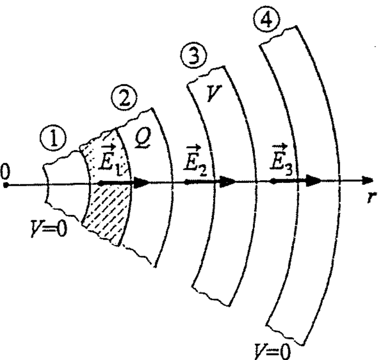
REŠENJE:
Sistem sa slike 87.1 predstavlja varijantu u sfernoj geometriji sistema sa slike 34.1 (kod koga je geometrija ravna). Analiza polja je, stoga, u principu ista kao u rešenju zadatka 34.

U unutrašnjosti prve lopte i prostoru van četvrte lopte ne postoji električno polje. U prostorima između prve i druge, druge i treće, i treće i četvrte lopte električno polje je radijalno, a po intenzitetu opada sa kvadratom ostojanja r od centra sistema (tačke O), što se zaključuje na osnovu uopštenog Gausovog zakona. Algebarski intenziteti električnog polja u pojedinim prostorima se mogu dati u sledećem obliku (prema slici 87.2):

$$E_1(r) = E_1(2d^+)\left(\frac{2d}{r}\right)^2, \quad 2d < r < 3d, \qquad (87.1)$$



Slika 87.1.



Slika 87.2.

$$E_2(r) = E_2(4d^+)\left(\frac{4d}{r}\right)^2, \quad 4d < r < 5d, \qquad (87.2)$$

$$E_3(r) = E_3(6d^+)\left(\frac{6d}{r}\right)^2, \quad 6d < r < 7d. \qquad (87.3)$$

Potencijal V treće lopte u odnosu na zemlju može se izraziti preko cirkulacije polja do prve lopte, koja je uzemljena, ili cirkulacijom polja do četvrte lopte, koja je takođe uzemljena. Tako, imamo

$$V = -\int_{r=2d}^{3d} E_1(r)\,dr - \int_{r=4d}^{5d} E_2(r)\,dr = -\frac{2d}{3}E_1(2d^+) - \frac{4d}{5}E_2(4d^+), \qquad (87.4)$$

$$V = \int_{r=6d}^{7d} E_3(r)\,dr = \frac{6d}{7}E_3(6d^+). \qquad (87.5)$$

Primenom uopštenog Gausovog zakona na zatvorenu površ koja obuhvata domen između sfere poluprečnika $r = 2d^+$ i sfere poluprečnika $r = 4d^+$, dobijamo sledeću jednačinu

$$-\epsilon_r E_1(2d^+) + 4E_2(4d^+) = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 d^2}, \qquad (87.6)$$

gde je Q naelektrisanje druge lopte, dato tekstom zadatka.

Zamislimo da je između treće lopte i zemlje vezan naponski generator. Promenom elektromotorne sile toga generatora menja se potencijal V. Potencijalom V, međutim, određeno je polje u čitavom sistemu. Naime, raspodela polja je data u jednačinama (87.1)-(87.3), a algebarski intenziteti polja uz spoljašnje površi lopti predstavljaju rešenje sistema jednačina (87.4)-(87.6). Tačke uz spoljašnje površi lopti, konačno, predstavljaju kritična mesta za eventualni proboj u sistemu. Očigledno, moguće je odrediti kritične brojne vrednosti potencijala V, kao granice opsega toga potencijala u kome je sistem sa slike 87.2 bezbedan od proboja.

Pretpostavimo da do eventualnog proboja u sistemu dolazi u tačkama uz spoljašnju površ prve lopte, tj. $|E_1(2d^+)| = E_{kr}$. U slučaju $E_1(2d^+) = E_{kr}$ imamo, prema relaciji (87.6), $E_2(4d^+) = 154,2$ kV/cm $> E_{kr0}$, što je nemoguće. Ako je, međutim, $E_1(2d^+) = -E_{kr}$, sledi $E_2(4d^+) = -95,8$ kV/cm $< -E_{kr0}$, što je takođe nemoguće. Zaključujemo da do proboja u dielektriku (između prve i druge lopte) ne može doći.

Pod pretpostavkom $E_2(4d^+) = E_{kr0}$ (proboj uz spoljašnu površ druge lopte), imamo, na osnovu jednačina (87.4)-(87.6), $E_1(2d^+) = 632,4$ V/cm, $E_3(6d^+) = -28,5$ kV/cm i $V = -24,42$ kV. Izračunati potencijal predstavlja donju granicu (V_{kr1}) opsega u kome je sistem bezbedan od proboja. U slučaju $E_2(4d^+) = -E_{kr0}$, dobija se $E_3(6d^+) = 64,84$ kV/cm $> E_{kr0}$, što je nemoguće.

Konačno, pretpostavimo proboj uz spoljašnju površ treće lopte. Za $E_3(6d^+) = E_{kr0}$ dobija se $E_1(2d^+) = -29,45$ kV/cm, $E_2(4d^+) = -7,6$ kV/cm i $V = 25,71$ kV $= V_{kr2}$ (gornja granica dozvoljenog opsega potencijala V). Pretpostavka $E_3(6d^+) = -E_{kr0}$ je neispravna, jer rezultuje u $E_2(4d^+) = 30,97$ kV/cm $> E_{kr0}$.

Opseg u kome može da se nalazi potencijal treće lopte (u odnosu na zemlju) tako da ni u jednoj tački sistema ne dođe do proboja je

$$-24,42\text{ kV} < V < 25,71\text{ kV}\,. \tag{87.7}$$

(88) Koaksijalni kabl, poluprečnika provodnika a i c ($c > a$), ima dva koaksijalna sloja dielektrika. Poluprečnik razdvojne površi slojeva dielektrika je b ($a < b < c$). Relativna permitivnost unutrašnjeg sloja je ϵ_{r1}, a njegovo kritično polje E_{kr1}. Relativna permitivnost spoljašnjeg sloja je ϵ_{r2}, a njegovo kritično polje E_{kr2}. Kakva veza treba da postoji između dimenzija kabla i parametara dielektrika da bi do proboja istovremeno došlo u oba dielektrika? (*P950924*)

REŠENJE:

Označimo sa $Q'^{(1)}_{kr}$ i $Q'^{(2)}_{kr}$ podužna opterećenja unutrašnjeg provodnika kabla (spoljašnji provodnik je suprotno opterećen) u slučajevima eventualnog proboja u unutrašnjem, odnosno spoljašnjem sloju dielektrika, respektivno. Nije teško zaključiti da ta opterećenja iznose

$$Q'^{(1)}_{kr} = 2\pi\epsilon_{r1}\epsilon_0 a E_{kr1}\,, \qquad Q'^{(2)}_{kr} = 2\pi\epsilon_{r2}\epsilon_0 b E_{kr2}\,. \tag{88.1}$$

Do proboja će istovremeno doći u oba sloja dielektrika kada je

$$\boxed{Q'^{(1)}_{kr} = Q'^{(2)}_{kr}\,,} \tag{88.2}$$

odakle je tražena veza između dimenzija kabla i parametara dielektrika

$$a\epsilon_{r1}E_{kr1} = b\epsilon_{r2}E_{kr2}\,. \tag{88.3}$$

(89) Odrediti najveći napon na koji sme da se priključi koaksijalni kabl, poluprečnika provodnika $a = 3$ mm i $c = 12$ mm, sa dva koaksijalna sloja dielektrika, razdvojena površi poluprečnika $b = 6$ mm. Parametri unutrašnjeg sloja dielektrika su $\epsilon_{r1} = 5$ i $E_{kr1} = 400$ kV/cm, dok su parametri spoljašnjeg sloja dielektrika $\epsilon_{r2} = 8$ i $E_{kr2} = 100$ kV/cm. (*Z960914*)

REZULTAT:

Traženi probojni napon je $U_{kr} = 108,13$ kV.

(90) Za koaksijalni kabl sa dva dielektrika čiji je poprečni presek prikazan na slici 73.1 je poznato: $a = 3$ mm, $b = 6$ mm, $c = 12$ mm, $\epsilon_{r1} = 8$, $E_{kr1} = 300$ kV/cm i $E_{kr2} = 200$ kV/cm. Povećavajući napon između provodnika kabla ustanovljeno je da je pri naponu $(U_{ac})_{kr} = 135$ kV popustio drugi dielektrik. Odrediti ϵ_{r2}. (*Z940405*)

REZULTAT:

Relativna permitivnost drugog dielektrika je $\epsilon_{r2} \approx 5$.

(91) Poluprečnici provodnika koaksijalnog kabla čiji je poprečni presek prikazan na slici 75.1 su $a = 10$ mm i $b = 30$ mm. Unutrašnji provodnik leži na podmetaču od dielektrika, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 4$ i električne čvrstine $E_{kr} = 200$ kV/cm, a ostatak prostora između provodnika kabla je ispunjen vazduhom. Električna čvrstina vazduha je $E_{kr0} = 30$ kV/cm. Bočne strane podmetača čine ugao $\alpha = 90°$.
(a) Na koliki najveći napon sme da se priključi kabl, a da ne dođe do proboja?
(b) Kolika je podužna gustina električne energije kabla pri tom najvećem naponu? (*Z910129*)

REŠENJE:

Električno polje između provodnika kabla je radijalno, intenziteta datog izrazom (75.1). Najjače električno polje je na površi unutrašnjeg provodnika kabla, tj. za $r = a^+$, i iznosi

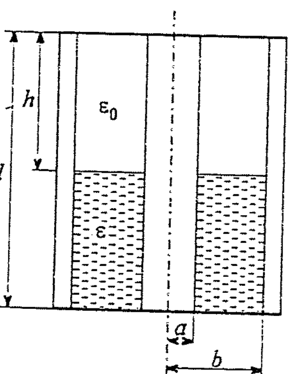
$$E(a^+) = \frac{U}{a\ln\frac{b}{a}}\,. \tag{91.1}$$

To polje je isto i u dielektriku i u vazduhu, pa do proboja dolazi u vazduhu ($E_{kr0} < E_{kr}$). Proboj počinje kada je $E(a^+) = E_{kr0}$, odakle je maksimalni (kritični) napon kabla

$$U_{kr} = E_{kr0}a\ln\frac{b}{a} = 33\text{ kV}\,. \tag{91.2}$$

Podužna kapacitivnost kabla iznosi $C' = 88,6$ pF/m, pa je podužna gustina električne energije pri maksimalnom naponu jednaka $\boxed{W'_e = C'U_{kr}^2/2} = 48,2$ mJ/m.

92. Koaksijalni kondenzator, poluprečnika unutrašnjeg provodnika $a = 1$ mm, odnosa poluprečnika spoljašnjeg i unutrašnjeg provodnika $b/a = e$ ($e \approx 2,718$) i dužine l, potpuno je ispunjen tečnim dielektrikom, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 5$ i dielektrične čvrstoće $E_{kr} = 180$ kV/cm. Kondenzator je postavljen u vertikalan položaj i priključen na stalan napon $U = 2,4$ kV, pa odvojen od izvora. Zatim je, kroz mali otvor pri dnu kondenzatora, dielektrik iscurio za visinu h, kao na slici 92.1, pri čemu je došlo do proboja u kondenzatoru. Dielektrična čvrstoća vazduha je $E_{kr0} = 30$ kV/cm. Efekti krajeva se mogu zanemariti. Odrediti odnos h/l. (*Z940902*)



Slika 92.1.

REŠENJE:
Prema uslovu zadatka, efekti krajeva se mogu zanemariti. To znači da možemo smatrati da je raspodela polja u kondenzatoru sa slike 92.1, uključujući zone blizu krajeva kondenzatora, ista kao u slučaju beskonačno dugačkog koaksijalnog kabla (kondenzatora), ispunjenog dielektrikom i vazduhom. Na taj način, električno polje u kondenzatoru sa slike 92.1 je radijalno i intenzitet mu zavisi samo od odstojanja r od ose kondenzatora. [Na razdvojnoj površi dielektrika i vazduha električno polje se ne menja zbog graničnog uslova (61.3).] Primenom uopštenog Gausovog zakona na cilindar (valjak) koji potpuno (po celoj dužini) obuhvata unutrašnji provodnik kondenzatora i priljubljen je uz njegovu površ, dobijamo jačinu električnog polja uz tu površ

$$E(a^+) = \frac{Q}{2\pi\left[\epsilon_r(l-h)+h\right]\epsilon_0 a} \quad \text{(u dielektriku i vazduhu)} . \qquad (92.1)$$

Za $h = 0$ dobijamo polje uz površ unutrašnjeg provodnika kondenzatora potpuno ispunjenog dielektrikom.

Opterećenost kondenzatora iznosi

$$Q = C^{(1)}U , \quad C^{(1)} = C'l , \quad C' = \frac{2\pi\epsilon_r\epsilon_0}{\ln\frac{b}{a}} , \qquad (92.2)$$

gde je $C^{(1)}$ kapacitivnost kondenzatora pre isticanja dielektrika, a C' je podužna kapacitivnost koaksijalnog kondenzatora, poluprečnika provodika a i b, ispunjenog homogenim dielektrikom, relativne permitivnosti ϵ_r. Opterećenje kondenzatora se ne menja u toku curenja dielektrika (kondenzator je odvojen od izvora).

Kada, kao rezultat isticanja dielektrika, visina vazdušnog dela prostora između elektroda kondenzatora, h, raste, raste i jačina polja $E(a^+)$, data izrazom (92.1). U trenutku kada je $E(a^+) = E_{kr0}$ doći će do proboja u vazduhu, uz površ unutrašnje elektrode kondenzatora (u dielektriku je, tada, $E(a^+) < E_{kr}$). Kombinovanjem

tako dobijene jednačine proboja sa jednačinama (92.1) i (92.2), dobija se linearna jednačina u kojoj je nepoznata veličina traženi odnos h/l. Rešavanjem te jednačine dobijamo

$$\frac{h}{l} = \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1}\left(1 - \frac{U}{a\ln\frac{b}{a}E_{kr0}}\right) = 0,25 . \qquad (92.3)$$

Čitaocu se preporučuje da izvede izraz (92.1) bez direktne primene uopštenog Gausovog zakona, upotrebom obrasca za kapacitivnost paralelelne veze kondenzatora ispunjenog tečnim dielektrikom i kondenzatora ispunjenog vazduhom.

93. Pločasti kondenzator ima dvoslojan dielektrik. Debljine slojeva dielektrika su $d_1 = 1$ mm i $d_2 = 2$ mm, njihove relativne permitivnosti su $\epsilon_{r1} = 3$ i $\epsilon_{r2} = 4$, a električne čvrstine $E_{kr1} = 240$ kV/cm i $E_{kr2} = 120$ kV/cm, respektivno. Ivični efekti su zanemarljivo mali. Koliki je probojni napon kondenzatora? (*P950404*)

REZULTAT:
Probojni napon je $U_{kr} = 40$ kV.

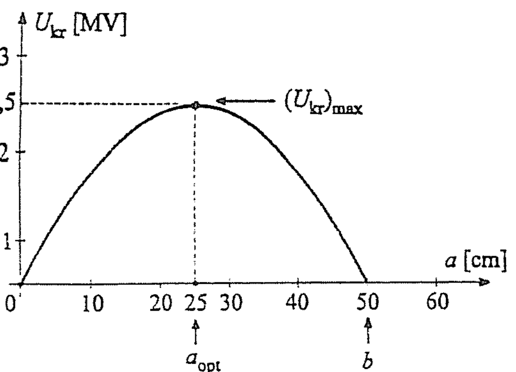
94. Površina elektroda pločastog kondenzatora prikazanog na slici 94.1 je $S = 1$ dm^2, a rastojanje elektroda je $d = 2$ mm. Dielektrik kondenzatora ima relativnu permitivnost $\epsilon_r = 4$ i električnu čvrstinu $E_{kr} = 500$ kV/cm. Između dielektrika i gornje elektrode kondenzatora postoji vazdušni zazor debljine $\delta = 0,2$ mm. (a) Izračunati kapacitivnost kondenzatora. (b) Koliki je najveći napon na koji kondenzator sme da se priključi, a da ne dođe do proboja u kondenzatoru? Napomene: električna čvrstina vazduha je $E_{kr0} = 30$ kV/cm, a ivične efekte zanemariti. (*Z900905*)

Slika 94.1.

REZULTAT:
Tražene veličine iznose: (a) $C = 136,2$ pF i (b) $U_{kr} = 1950$ V.

95. Poluprečnici elektroda sferičnog kondenzatora su a i $b = 500$ mm ($a < b$). Kondenzator je ispunjen homogenim dielektrikom, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 3$, čije je kritično električno polje $E_{kr} = 20$ MV/m. Koliki treba da bude poluprečnik a da bi kondenzator mogao da izdrži što veći napon? Koliki je probojni napon kondenzatora u tome slučaju? (*Z920915*)

REŠENJE:
Pretpostavimo da je U napon između unutrašnje i spoljašnje elektrode kondenza-



Slika 95.1.

tora. Nije teško pokazati da je jačina polja uz unutrašnju elektrodu

$$E(a^+) = \frac{bU}{a(b-a)}, \tag{95.1}$$

a to je najjače polje u dielektriku kondenzatora i proboj nastupa kada ono po jačini dostigne kritično polje za dati dielektrik. Stoga je najveći napon koji kondenzator može da izdrži

$$U_{kr} = -\frac{E_{kr}}{b}a^2 + E_{kr}a. \tag{95.2}$$

Optimalan poluprečnik a, za koji je napon U_{kr} maksimalan, dobija se iz uslova

$$\frac{dU_{kr}}{da} = 0, \tag{95.3}$$

tj. $-(2E_{kr}/b)a + E_{kr} = 0$. Rešenje je $a_{opt} = b/2 = 250$ mm. Grafik (kvadratne) funkcije $U_{kr}(a)$ je skiciran na slici 95.1. Očigledno, funkcija $U_{kr}(a)$ u tački $a = a_{opt}$ ima maksimum. To se moglo zaključiti i iz znaka drugog izvoda funkcije u tački $a = a_{opt}$.

Maksimalni probojni napon je

$$(U_{kr})_{max} = U_{kr}(a_{opt}) = \frac{bE_{kr}}{4} = 2,5\ \text{MV}. \tag{95.4}$$

96. Poluprečnici koaksijalnog kabla su a i $b = 5$ mm $(a < b)$. Kabl je ispunjen homogenim dielektrikom, relativne permitivnosti $\epsilon_r = 3$, čije je kritično električno polje $E_{kr} = 20$ MV/m. Koliki treba da bude poluprečnik a da bi kabl mogao da izdrži što veći napon? Koliki je probojni napon kabla u tome slučaju?

REZULTAT:
Tražene veličine iznose: $a_{opt} = b/\mathrm{e} = b/2,718 = 1,84$ mm i $(U_{kr})_{max} = 36,8$ kV.

97. Poluprečnik unutrašnjeg provodnika koaksijalnog kabla je $a = 20$ mm, a unutrašnji poluprečnik spoljašnjeg provodnika je $c = 50$ mm. Kabl ima dva koaksijalna sloja dielektrika (slika 73.1). Relativne permitivnosti unutrašnjeg i spoljašnjeg sloja dielektrika su $\epsilon_{r1} = 4$ i $\epsilon_{r2} = 3$, respektivno, a odgovarajuće električne čvrstine dielektrika su $E_{kr1} = 300$ kV/cm i $E_{kr2} = 200$ kV/cm. Koliki treba da bude poluprečnik razdvojne površi slojeva dielektrika da bi probojni napon kabla bio najveći? Koliki je taj probojni napon? *(Z910618)*

REŠENJE:
Podužne opterećenosti kabla u slučajevima eventualnog proboja u unutrašnjem, odnosno spoljašnjem sloju dielektrika, $Q'^{(1)}_{kr}$ i $Q'^{(2)}_{kr}$, date su, redom, izrazima (88.1). Odgovarajući naponi između provodnika kabla su

$$U^{(1)}_{kr} = \frac{Q'^{(1)}_{kr}}{C'}, \qquad U^{(2)}_{kr} = \frac{Q'^{(2)}_{kr}}{C'}, \qquad C' = 2\pi\epsilon_0\left(\frac{\ln\frac{b}{a}}{\epsilon_{r1}} + \frac{\ln\frac{c}{b}}{\epsilon_{r2}}\right)^{-1}, \tag{97.1}$$

gde je C' podužna kapacitivnost datog kabla. Kombinovanjem jednačina (88.1) i (97.1), dobijamo

$$U^{(1)}_{kr} = \epsilon_{r1}E_{kr1}a\left(\frac{\ln\frac{b}{a}}{\epsilon_{r1}} + \frac{\ln\frac{c}{b}}{\epsilon_{r2}}\right), \qquad U^{(2)}_{kr} = \epsilon_{r2}E_{kr2}b\left(\frac{\ln\frac{b}{a}}{\epsilon_{r1}} + \frac{\ln\frac{c}{b}}{\epsilon_{r2}}\right), \tag{97.2}$$

tj., za date brojne vrednosti,

$$U^{(1)}_{kr}(b) = -(200\ln b + 49,37)\ \text{kV},$$

$$U^{(2)}_{kr}(b) = -b(5000\ln b + 1234,3)\ \text{kV} \qquad (b \text{ u m}). \tag{97.3}$$

Nije teško pokazati da je prvi izvod funkcije $U^{(1)}_{kr}(b)$ negativan, a prvi izvod funkcije $U^{(2)}_{kr}(b)$ pozitivan, u čitavom opsegu mogućih vrednosti poluprečnika b $(a \leq b \leq c)$. Otuda zaključujemo da je funkcija $U^{(1)}_{kr}(b)$ monotono opadajuća, a funkcija $U^{(2)}_{kr}(b)$ monotono rastuća, za sve vrednosti poluprečnika b od interesa. Na slici 97.1 su prikazani grafici funkcija $U^{(1)}_{kr}(b)$ i $U^{(2)}_{kr}(b)$.

Probojni napon kabla je

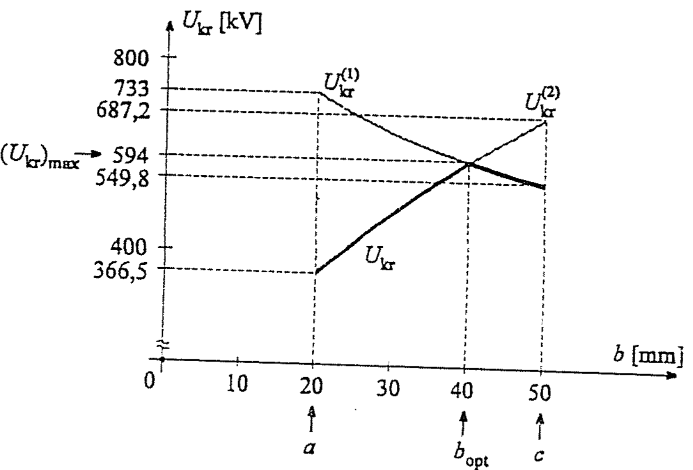
$$U_{kr}(b) = \min\{U^{(1)}_{kr}(b), U^{(2)}_{kr}(b)\}. \tag{97.4}$$

Na slici 97.1 je skiciran i grafik funkcije $U_{kr}(b)$. Očigledno, probojni napon kabla je najveći, tj. funkcija $U_{kr}(b)$ ima maksimum, u tački definisanoj presekom grafika funkcija $U^{(1)}_{kr}(b)$ i $U^{(2)}_{kr}(b)$, tj. za poluprečnik b_{opt} određen uslovom

$$U^{(1)}_{kr}(b_{opt}) = U^{(2)}_{kr}(b_{opt}), \tag{97.5}$$

koji se, prema izrazima (97.2), svodi na uslov (88.3). Odatle je optimalni poluprečnik razdvojne površi slojeva dielektrika

$$b_{opt} = \frac{a\epsilon_{r1}E_{kr1}}{\epsilon_{r2}E_{kr2}} = 40\ \text{mm}. \tag{97.6}$$



Slika 97.1.

Pri tome, probojni napon iznosi $(U_{kr})_{max} = 594$ kV.

2. STALNE ELEKTRIČNE STRUJE

98. Struju u elektrolitu obrazuju dve vrste jona, naelektrisanja Q, odnosno $-Q$. Koncentracija svake vrste jona je N', srednja brzina kretanja prve vrste je v_1, a druge v_2. Odrediti vektor gustine struje u elektrolitu. (*P940407*)

REŠENJE:
Vektor gustine stuje u elektrolitu je

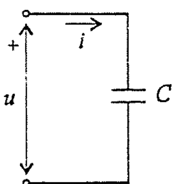
$$J = N'Q(v_1 - v_2) . \qquad (98.1)$$

99. (a) Napisati jednačinu kontinuiteta za vremenski promenljiva polja. (b) Polazeći od te jednačine izvesti vezu između jačine struje i napona kondenzatora. (*P960904*)

REŠENJE:
(a) Jednačina kontinuiteta za vremenski promenljiva polja glasi

$$\oint_S J \cdot dS = -\frac{dq_S}{dt} , \qquad (99.1)$$

gde je q_S naelektrisanje obuhvaćeno zatvorenom površi S, orijentisanom upolje (videti sliku 1.2).



Slika 99.1.

(b) Posmatrajmo šemu kondenzatora priključenog na vremenski promenljiv napon prikazanu na slici 99.1. Podrazumeva se da je kondenzator idealan, tj. da je dielektrik kondenzatora savršen (neprovodan), kao i da duž priključnih provodnika kondenzatora nema viška naelektrisanja (sve naelektrisanje je lokalizovano na elektrodama kondenzatora). Neka je S zatvorena površ koja obuhvata samo gornju elektrodu kondenzatora. Tada je na levoj stani znaka jednakosti u jednačini (99.1) $-i$, dok je q_S jednako naelektrisanju gornje elektrode,

odnosno opterećenosti kondenzatora, te je $q_S = Cu$. Odavde je

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} . \tag{99.2}$$

100. (a) Napisati osnovne integralne jednačine za stalno strujno polje. (b) Kako glase odgovarajuće jednačine u teoriji električnih kola? (*P960401*)

REŠENJE:
(a) Osnovne dve integralne jednačine za stalno strujno polje su jednačina (1.1) i jednačina kontinuiteta stalnih struja, data sa

$$\oint_S J \cdot \mathrm{d}S = 0 . \tag{100.1}$$

Da bi stalno strujno polje bilo potpuno određeno, još je potrebno u svakoj tački sredine poznavati vezu između gustine struje i jačine električnog polja,

$$J = J(E) . \tag{100.2}$$

(b) Odgovarajuće jednačine u teoriji električnih kola odnose se na jačine struja i napone grana u kolu. To su prvi Kirhofov zakon,

$$\sum_{k=1}^{M} I_k = 0 , \tag{100.3}$$

za proizvoljni čvor kola, u kome se sustiče M grana [izvodi se iz jednačine (100.1)], i drugi Kirhofov zakon,

$$\sum_{l=1}^{N} U_l = 0 , \tag{100.4}$$

za proizvoljan zatvoreni put (S) u kolu, koji sadrži N grana [izvodi se iz jednačine (1.1)].

Relaciji (100.2) odgovaraju veze između napona i struje za svaku granu.

Operativni oblik drugog Kirhofovog zakona, po kome se postavljaju jednačine prilikom rešavanja električnih kola, glasi

$$\sum_S (E, -RI) = 0 , \tag{100.5}$$

gde je E oznaka za elektromotornu silu idealnog naponskog generatora, R oznaka za otpornost otpornika, a zatvoreni put S sadrži samo grane sa idealnim naponskim generatorima i otpornicima (a ne sadrži grane sa idealnim strujnim generatorima).

101. Dokazati da po zapremini linearnog, homogenog provodnika u stalnom strujnom polju ne može biti slobodnog naelektrisanja.

REŠENJE:
Za linearni provodnik je

$$J = \sigma E \tag{101.1}$$

(Omov zakon u lokalnom obliku), gde je σ specifična električna provodnost provodnika.

Zamislimo proizvoljnu zatvorenu površ S u provodniku. Polazeći od uopštenog Gausovog zakona, ukupno slobodno naelektrisanje obuhvaćeno tom površi je

$$Q = \oint_S D \cdot \mathrm{d}S = \oint_S \epsilon E \cdot \mathrm{d}S = \oint_S \frac{\epsilon}{\sigma} J \cdot \mathrm{d}S = \frac{\epsilon}{\sigma} \oint_S J \cdot \mathrm{d}S = 0 , \tag{101.2}$$

pri čemu je ϵ/σ moguće izvući ispred znaka integrala zato što je provodnik homogen. Ako pretpostavimo da je površ S mala, za gustinu slobodnog zapreminskog naelektrisanja dobijamo $\rho = Q/v = 0$, gde je v zapremina domena obuhvaćenog površi S. Time je dokaz završen.

Može se dokazati da je i gustina vezanog naelektrisanja nula, što se ostavlja čitaocu za vežbu.

102. Polazeći od graničnih uslova za stalno strujno polje, izvesti pravilo prelamanja strujnica na razdvojnoj površi dve linearne sredine, specifičnih provodnosti σ_1 i σ_2.

REŠENJE:
Granični uslov (61.1) isti je kao za elektrostatičko polje, dok se iz jednačine kontinuiteta (100.1) dobija

$$n \cdot J_1 - n \cdot J_2 = 0 , \tag{102.1}$$

gde je n ort normale na razdvojnu površ, usmeren od sredine 2 ka sredini 1.

Pravilo prelamanja strujnica (linija vektora J) se izvodi kao u zadatku 61, i glasi

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} , \tag{102.2}$$

gde su α_1 i α_2 uglovi između strujnica i normale na razdvojnu površ u prvoj i drugoj sredini, respektivno.

Pod kojim uglom izlaze strujnice iz veoma dobrog provodnika u dielektrik sa malim gubicima?

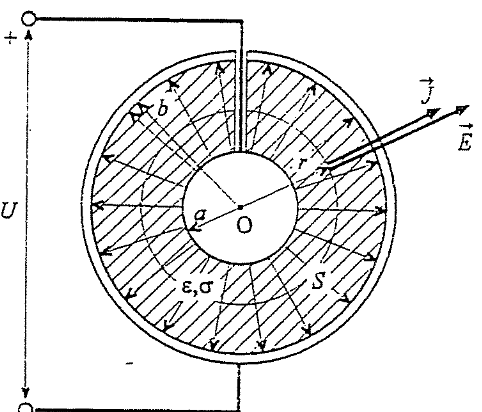
103. Dokazati da na razdvojnoj površi dve linearne provodne sredine u stalnom strujnom polju u opštem slučaju postoji slobodno naelektrisanje.

REŠENJE:
Na osnovu relacija (61.2), (55.1), (101.1) i (102.1), gustina površinskog slobodnog naelektrisanja, η, na razdvojnoj površi je

$$\eta = n \cdot D_1 - n \cdot D_2 = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} n \cdot J_1 - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} n \cdot J_2 = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) n \cdot J_1 , \qquad (103.1)$$

što je, u opštem slučaju, različito od nule.
Očigledno, u slučaju kada parametri sredina zadovoljavaju relaciju $\epsilon_1/\sigma_1 = \epsilon_2/\sigma_2$, na razdvojnoj površi nema slobodnog naelektrisanja.

104. Sferični kondenzator, poluprečnika elektroda a i b ($a < b$), ispunjen je homogenim nesavršenim dielektrikom, permitivnosti ϵ i specifične provodnosti σ. Specifična provodnost elektroda kondenzatora je mnogo veća od σ. Kondenzator je priključen na stalan napon U. Izvesti izraz za snagu Džulovih gubitaka u dielektriku kondenzatora. (*P960917*)



Slika 104.1.

REŠENJE:
Pošto je $\sigma \neq 0$, u kolu kondenzatora postoji stalna struja. Zbog simetrije, vektor gustine struje u dielektriku je radijalan, a njegov intenzitet, J, zavisi samo od radijalne sferične koordinate, r (slika 104.1). Primenom jednačine kontinuiteta na sfernu površ poluprečnika r, koncentričnu sa elektrodama kondenzatora, dobijamo

$$J 4\pi r^2 - I = 0 ,$$

$$a < r < b , \qquad (104.1)$$

gde je I jačina struje u priključnim provodnicima kondenzatora. Odavde je $J = I/(4\pi r^2)$. Vektor jačine električnog polja u dielektriku je $E = J/\sigma$, a razlika potencijala elektroda kondenzatora

$$V_a - V_b = \int_a^b E \, dr = \frac{b-a}{4\pi\sigma ab} I , \qquad (104.2)$$

pri čemu je $V_a - V_b = U$. (Svaka elektroda se može smatrati ekvipotencijalnom, zbog uslova $\sigma_{\text{elektrode}} \gg \sigma$.) Konačno, provodnost kondenzatora je

$$G = \frac{I}{U} = \frac{4\pi\sigma ab}{b-a} , \qquad (104.3)$$

a snaga Džulovih gubitaka u dielektriku

$$P_J = GU^2 . \qquad (104.4)$$

Snaga Džulovih gubitaka se može dobiti i kao

$$P_J = \int_a^b \underbrace{\frac{J^2}{\sigma}}_{dP_J/dv} \underbrace{4\pi r^2 \, dr}_{dv} , \qquad (104.5)$$

gde je

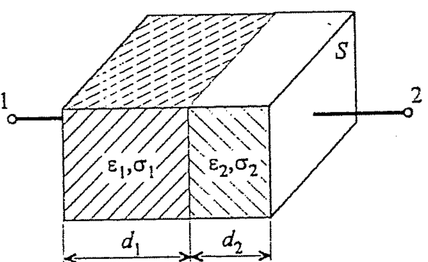
$$\frac{dP_J}{dv} = J \cdot E = \frac{J^2}{\sigma} \qquad (104.6)$$

zapreminska gustina snage Džulovih gubitaka u dielektriku.
Koja veza postoji između provodnosti i kapacitivnosti datoga kondenzatora?

105. Koaksijalni kabl je ispunjen homogenim nesavršenim dielektrikom, male specifične provodnosti σ. Poluprečnici provodnika kabla su a i b ($a < b$). Napon između provodnika kabla je U. Odrediti: (a) podužnu provodnost (odvodnost) kabla i (b) podužnu snagu Džulovih gubitaka u kablu. (*P920627*)

REZULTAT:
Traženi izrazi su: (a) $G' = 2\pi\sigma / \ln(b/a)$ i (b) $P'_J = G'U^2$.

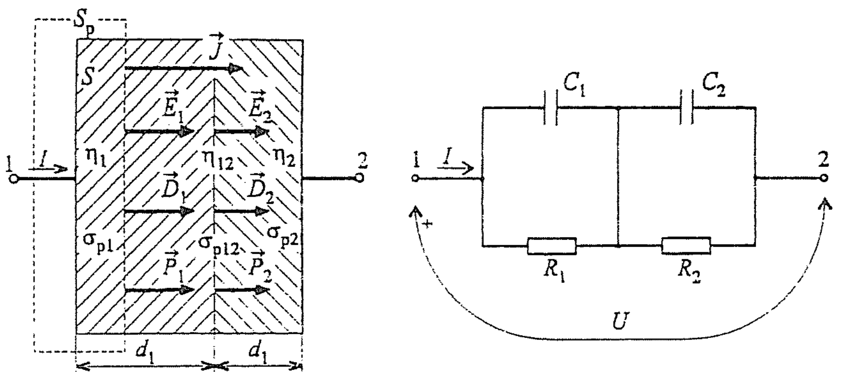
106. Dva nesavršena homogena dielektrika, permitivnosti ϵ_1 i ϵ_2 i malih specifičnih provodnosti σ_1 i σ_2, nalaze se između elektroda pločastog kondenzatora, kao na slici 106.1. Debljine dielektrika su d_1 i d_2, a površine elektroda kondenzatora S. Kondenzator je priključen na stalan napon U. (a) Odrediti izraz za jačinu struje u priključnim provodnicima kondenzatora. (b) Odrediti izraze za gustine slobodnih i vezanih naelektrisanja kondenzatora. (c) Koristeći se idealnim otpornicima i kondenzatorima, nacrtati ekvivalentnu šemu datoga kondenzatora i odrediti karakteristike upotrebljenih elemenata. (*Z950304*)



Slika 106.1.

REŠENJE:
(a) Vektor gustine struje u dielektricima je normalan na ploče kondenzatora i ne menja se u ravnima koje su paralelne pločama. Primenom jednačine kontinuiteta na cilindričnu zatvorenu površ S_p prikazanu na slici 106.2, dobijamo

$$J = \frac{I}{S} = \text{const} , \qquad (106.1)$$



Slika 106.2.

Slika 106.3.

u oba dielektrika, gde je I jačina struje u kolu kondenzatora. Iz relacija $E_1 = J/\sigma_1$, $E_2 = J/\sigma_2$ i

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2 \tag{106.2}$$

sledi

$$I = \frac{\sigma_1 \sigma_2 U S}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}. \tag{106.3}$$

(b) Pošto su provodnici i dielektrici kondenzatora homogeni, u njima nema zapreminskog slobodnog, niti vezanog, naelektrisanja (videti zadatak 101).

Prema slici 106.2, gustine površinskog slobodnog naelektrisanja su

$$\eta_1 = D_1 = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 U}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}, \quad \eta_2 = -D_2 = -\frac{\epsilon_2 \sigma_1 U}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1},$$

$$\eta_{12} = D_2 - D_1 = \frac{(\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2) U}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}, \tag{106.4}$$

dok su gustine površinskog vezanog naelektrisanja

$$\sigma_{p1} = -P_1 = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)\sigma_2 U}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}, \quad \sigma_{p2} = P_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)\sigma_1 U}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1},$$

$$\sigma_{p12} = P_1 - P_2 = \frac{[(\epsilon_1 - \epsilon_0)\sigma_2 - (\epsilon_2 - \epsilon_0)\sigma_1] U}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}. \tag{106.5}$$

U gornjim relacijama, D_1 i D_2 su električne indukcije, a P_1 i P_2 polarizacije, u dielektricima.[4]

[4] Uočiti da, za razliku od odgovarajućeg kondenzatora sa savršenim dielektricima (ili bar jednim savršenim dielektrikom), vektor D nije u oba dielektrika isti.

(c) Ekvivalentna šema kondenzatora je prikazana na slici 106.3. Karakteristike elemenata (idealnih kondenzatora i otpornika) su:

$$C_1 = \frac{\epsilon_1 S}{d_1}, \quad C_2 = \frac{\epsilon_2 S}{d_2}, \quad R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S}, \quad R_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 S}. \tag{106.6}$$

Jačina struje kondenzatora se može dobiti i kao

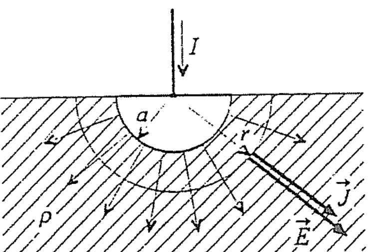
$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}. \tag{106.7}$$

Preporučuje se čitaocu da odredi izraz za snagu Džulovih gubitaka u kondenzatoru.

107. Izračunati otpornost uzemljenja poluloptastog uzemljivača, poluprečnika $a = 10$ m, ukopanog u vlažnu zemlju, specifične otpornosti $\rho = 100\ \Omega\text{m}$? (*P920205*)

REŠENJE:
Strujnice u zemlji su radijalne (u odnosu na centar uzemljivača) i iste gustine na polusfernoj površi, poluprečnika r (slika 107.1). Na osnovu jednačine kontinuiteta, gustina struje je

$$J = \frac{I}{2\pi r^2}, \tag{107.1}$$



Slika 107.1.

gde je I jačina struje uzemljivača. Jačina električnog polja u zemlji je $E = \rho J$, a potencijal uzemljivača u odnosu na beskonačno daleke tačke

$$V_{uz} = \int_a^{\infty} E\, dr = \frac{\rho I}{2\pi a}. \tag{107.2}$$

Konačno, otpornost uzemljenja uzemljivača je, po definiciji,

$$R_{uz} = \frac{V_{uz}}{I} = \frac{\rho}{2\pi a} = 1,6\ \Omega. \tag{107.3}$$

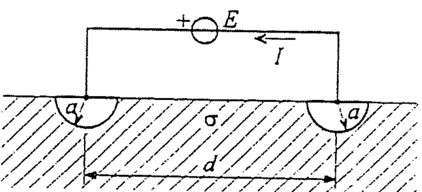
Čitaocu se preporučuje da, kao vežbu, izračuna snagu Džulovih gubitaka u zemlji, pod pretpostavkom da je $I = 1000$ A.

108. Električno kolo prikazano na slici 108.1 čine idealni naponski generator elektromotorne sile $E = 100$ V, žica zanemarljivo male otpornosti i dva poluloptasta

uzemljivača. Poluprečnik svakog uzemljivača je $a = 10/\pi$ m, specifična provodnost zemlje $\sigma = 10$ mS/m, a odstojanje između uzemljivača $d = 1$ km ($d \gg a$). Izračunati jačinu struje generatora. (*P930905*)

REŠENJE:
Pošto su uzemljivači međusobno veoma udaljeni, potencijal u odnosu na beskonačno daleke tačke svakoga od njih možemo računati kao da je usamljen. Stoga je ekvivalentna otpornost koju vidi generator jednaka $2R_{uz}$, pri čemu je R_{uz} dato izrazom (107.3). Kako je otpornost žice zanemarljivo mala, jačina struje generatora je

$$I = \frac{E}{2R_{uz}} = \pi\sigma a E = 10 \text{ A}. \quad (108.1)$$



Slika 108.1.

Preporuke čitaocu:
- Proveriti rezultat računajući cirkulaciju rezultantnog električnog polja po površi zemlje između uzemljivača.
- Izračunati snagu Džulovih gubitaka u zemlji.

109. U homogenom cilindričnom provodniku, površine poprečnog preseka S i specifične provodnosti σ, postoji stalna struja, jačine I. Kolika je zapreminska gustina snage Džulovih gubitaka u ovom provodniku? (*P890304*)

REZULTAT:
Zapreminska gustina snage je $\mathrm{d}P_J/\mathrm{d}v = I^2/(\sigma S^2)$.

110. Žičani provodnik konstantnog poprečnog preseka i ukupne dužine l sastoji se od dva redno vezana dela jednake dužine, a različitih specifičnih provodnosti, σ_1 i σ_2. Kada se provodnik priključi na stalan napon U, kolike su jačine električnog polja u njegovim delovima? (*P920403*)

REZULTAT:
Jačine električnog polja u pojedinim delovima su $E_1 = 2\sigma_2 U/[l(\sigma_1+\sigma_2)]$ i $E_2 = 2\sigma_1 U/[l(\sigma_1+\sigma_2)]$.

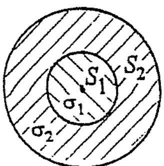
111. Dugačak prav provodnik, čiji je poprečni presek prikazan na slici 111.1, sastoji se od dva sloja. Poznate su površine poprečnih preseka slojeva, S_1 i S_2, dužina provodnika, l, i specifične provodnosti slojeva, σ_1 i σ_2. Ako u provodniku postoji stalna struja jačine I, odrediti snagu Džulovih gubitaka u provodniku. (*P900914*)

REŠENJE:
Vektori $\boldsymbol{J}$ i $\boldsymbol{E}$ u provodniku su aksijalni. Na osnovu jednačine (1.1), električno polje je isto u oba sloja provodnika, $E_1 = E_2 = E$. Kako je

$$I = J_1 S_1 + J_2 S_2, \quad (111.1)$$

gde su $J_1 = \sigma_1 E$ i $J_2 = \sigma_2 E$ gustine struje u pojedinim slojevima, to je jačina električnog polja u provodniku

$$E = \frac{I}{\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2}. \quad (111.2)$$



Slika 111.1.

Konačno, napon između krajeva provodnika je $U = El$, a snaga Džulovih gubitaka u provodniku $P_J = UI$.

Tražena snaga gubitaka se može dobiti i kao $P_J = I^2/G_e$, gde je

$$G_e = \frac{\sigma_1 S_1}{l} + \frac{\sigma_2 S_2}{l} \quad (111.3)$$

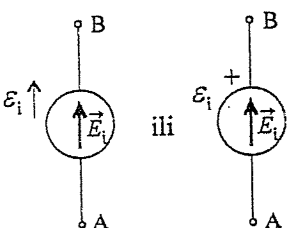
provodnost paralelne veze provodnih slojeva.

112. (a) Kako se definiše strano električno polje u generatoru? (b) Kakva veza postoji između tog polja i elektromotorne sile generatora? Skicirati generator i označiti smerove stranog polja i elektromotorne sile. (*P940616*)

REŠENJE:
(a) Vektor jačine stranog (pobudnog) električnog polja generatora je, po definiciji,

$$E_i = \frac{F_i}{Q}, \quad (112.1)$$

gde je F_i strana sila koja deluje na slobodne nosioce naelektrisanja Q.



Slika 112.1.

(b) Elektromotorna sila generatora je

$$\mathcal{E}_i = \int_A^B E_i \cdot dl, \quad (112.2)$$

pri čemu se stvarni smerovi stranog polja i elektromotorne sile generatora poklapaju (slika 112.1). Gornji integral se računa duž proizvoljne putanje kroz generator.

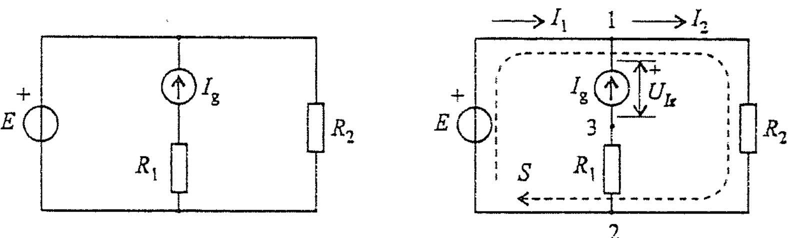
Kakva veza postoji između vektora E_i i vektora jačine električnog polja usled viška naelektrisanja, E, u generatoru čiji su priključci otvoreni?

113. Vektor jačine stranog električnog polja u generatoru je E_i, a vektor gustine struje J. Kolika je zapreminska gustina snage koju razvijaju strane sile? (*P930624*)

REŠENJE:
Zapreminska gustina snage koju razvijaju strane sile u generatoru je

$$\frac{\mathrm{d}P_E}{\mathrm{d}v} = E_i \cdot J \,. \qquad (113.1)$$

114. U kolu stalne struje prikazanom na slici 114.1 poznato je: $E = 100$ V, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$ i $I_g = 1$ A. Izračunati snage koje razvijaju idealni naponski generator i idealni strujni generator. (*P900622*)



Slika 114.1. Slika 114.2.

REŠENJE:
Usvojimo referentne smerove za struje grana kao na slici 114.2. Jednačine po prvom Kirhofovom zakonu (100.3) za čvor 1 i drugom Kirhofovom zakonu (100.5) za zatvoreni put S su, redom,

$$-I_1 + I_2 - I_g = 0 \,, \qquad (114.1)$$

$$E - R_2 I_2 = 0 \,. \qquad (114.2)$$

Odavde je $I_2 = E/R_2 = 1$ A i $I_1 = I_2 - I_g = 0$.
Snaga koju razvija idealan naponski generator je

$$P_E = E I_1 = 0 \,. \qquad (114.3)$$

Napon idealnog strujnog generatora je

$$U_{I_g} = U_{13} = \sum_3^1 (E, -RI) = R_1 I_g + E = 150 \text{ V} \,, \qquad (114.4)$$

pa je snaga koju taj generator razvija

$$P_{I_g} = U_{I_g} I_g = 150 \text{ W} \,. \qquad (114.5)$$

Izračunajmo snage Džulovih gubitaka u otpornicima,

$$P_{R_1} = R_1 I_g^2 = 50 \text{ W} \,, \qquad P_{R_2} = R_2 I_2^2 = 100 \text{ W} \,, \qquad (114.6)$$

i uočimo da je

$$P_E + P_{I_g} = P_{R_1} + P_{R_2} \,, \qquad (114.7)$$

što mora biti, na osnovu teoreme održanja snage u kolu. Takođe je

$$U_{12}(-I_1) + U_{12}(-I_g) + U_{12} I_2 = 0 \qquad (114.8)$$

(zbir snaga koje primaju grane kola je nula).

115. U kolu prikazanom na slici 115.1 je $I_{g1} = 1$ mA, $I_{g2} = 2$ mA, $I_{g3} = 3$ mA, $E = 1$ V, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ i $R_3 = 3$ kΩ. Izračunati snagu koju razvija idealni strujni generator struje I_{g3}. (*P960925*)

REŠENJE:
Struja otpornika otpornosti R_2, u odnosu na referentni smer ulevo, je

$$I_2 = I_{g1} + I_{g2} - I_{g3} = 0 \,. \qquad (115.1)$$

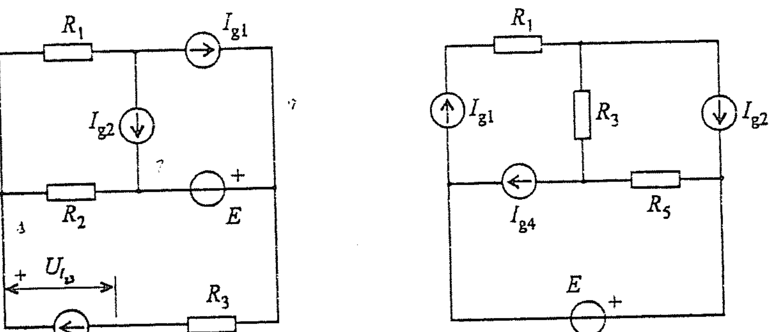
Napon idealnog strujnog geneneratora I_{g3}, za prirodne smerove napona i struje generatora, iznosi

$$U_{I_{g3}} = R_3 I_{g3} - E - R_2 I_2 = 8 \text{ V} \,, \qquad (115.2)$$

pa je njegova snaga

$$P_{I_{g3}} = U_{I_{g3}} I_{g3} = 24 \text{ mW} \,. \qquad (115.3)$$

Proveriti zadovoljenost zakona održanja snage u kolu.

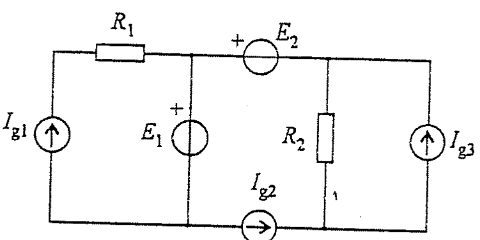


Slika 115.1. Slika 116.1.

116. Za kolo stalne struje prikazano na slici 116.1 poznato je: $I_{g1} = 1$ A, $I_{g2} = 2$ A, $I_{g4} = 1$ A, $E = 10$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$ i $R_5 = 1\ \Omega$. Izračunati snagu idealnog strujnog generatora I_{g1}. (*P940407*)

REZULTAT:
Podrazumeva se snaga koju aparat proizvodi, pa je $P_{I_{g1}} = 7$ W.

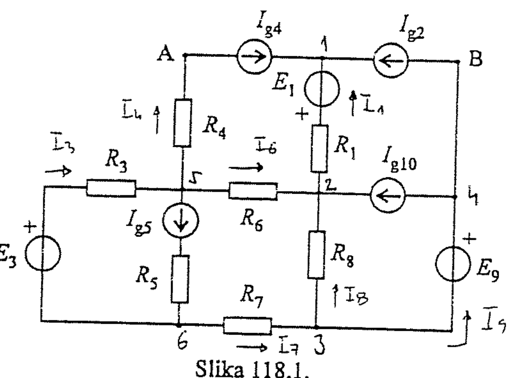
117. U kolu stalne struje prikazanom na slici 117.1 je $E_1 = E_2 = 10$ V, $I_{g1} = I_{g2} = I_{g3} = 1$ A i $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$. Izračunati snage idealnih strujnih generatora. (*P930221*)



Slika 117.1.

REZULTAT:
Tražene snage su $P_{I_{g1}} = 20$ W i $P_{I_{g2}} = P_{I_{g3}} = 0$.

118. Za kolo stalne jednosmerne struje prikazano na slici 118.1 je poznato: $E_1 = 3$ V, $E_3 = 5$ V, $E_9 = 10$ V, $I_{g2} = -5$ mA, $I_{g4} = 10$ mA, $I_{g5} = 6$ mA, $I_{g10} = 5$ mA, $R_1 = 250\ \Omega$, $R_3 = R_6 = 100\ \Omega$, $R_4 = 200\ \Omega$, $R_5 = 25\ \Omega$ i $R_7 = R_8 = 50\ \Omega$. Odrediti snagu koju razvija idealni strujni generator jačine struje I_{g4} i napon između tačaka A i B.

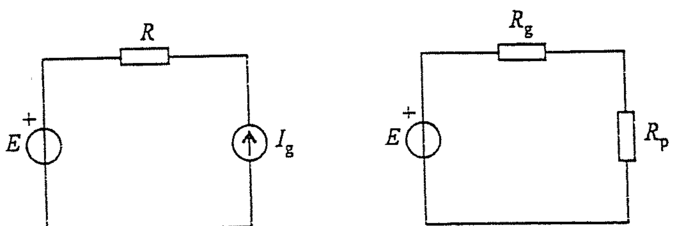


Slika 118.1.

(*P940121*)

REZULTAT:
Tražene veličine su $P_{I_{g4}} = -5,5$ mW i $U_{AB} = -10,3$ V.

119. U kolu prikazanom na slici 119.1 je $E = 10$ V i $R = 1\ \Omega$. Kolika treba da bude struja idealnog strujnog generatora (I_g) da bi snaga koju prima taj generator bila maksimalna? Kolika je ta maksimalna snaga? Kolika je pri tome snaga otpornika? (*P950903*)



Slika 119.1. Slika 120.1.

REŠENJE:
Snaga koju prima idealan strujni generator je

$$P_{I_g} = -(E + RI_g)I_g \,. \tag{119.1}$$

Računanjem prvog i drugog izvoda ili analizom grafika gornje funkcije, zaključuje se da ona ima maksimum za $I_g = -E/(2R) = -5$ A, koji iznosi $(P_{I_g})_{\max} = 25$ W. Snaga otpornika je pri tome $P_R = RI_g^2 = 25$ W. Koliku snagu razvija idealan naponski generator?

120. Snaga prijemnika u kolu prikazanom na slici 120.1 jednaka je 4,5 W kada je otpornost prijemnika jednaka $R_p' = 0,5\ \Omega$ i kada je jednaka $R_p'' = 2\ \Omega$. Kolika treba da bude otpornost prijemnika da bi njegova snaga bila maksimalna? Kolika je ta maksimalna snaga? (*P930905*)

REŠENJE:
Snage prijemnika kada je njegova otpornost R_p', odnosno R_p'', date su sledećim izrazima:

$$P_p' = \frac{R_p'}{(R_g + R_p')^2}E^2 \,, \qquad P_p'' = \frac{R_p''}{(R_g + R_p'')^2}E^2 \,. \tag{120.1}$$

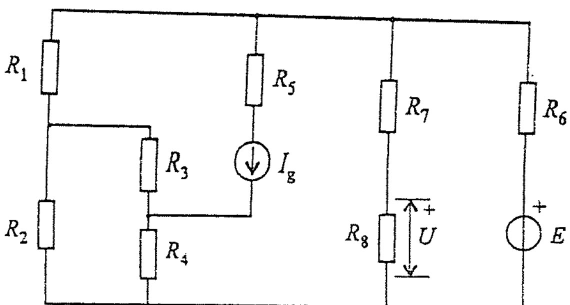
Iz uslova $P_p' = P_p''$ dobijamo otpornost generatora $R_g = 1\ \Omega$, pa je, iz jedne od gornjih jednačina, elektromotorna sila generatora $E = 4,5$ V.

Otpornost prijemnika pri kojoj je njegova snaga maksimalna i ta maksimalna snaga su

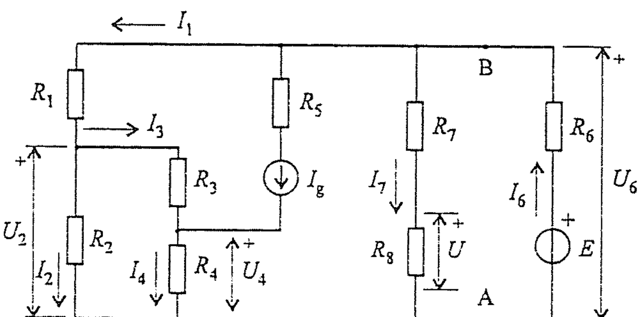
$$R_p = R_g = 1\ \Omega \,, \qquad (P_p)_{\max} = \frac{E^2}{4R_g} = 5,06 \text{ W} \,. \tag{120.2}$$

121. U kolu prikazanom na slici 121.1 poznato je: $E = 45$ V, $I_g = 9$ mA, $R_1 = R_2 = 11$ kΩ, $R_3 = R_5 = R_6 = 1$ kΩ, $R_7 = 25$ kΩ i $R_8 = 8$ kΩ. Izračunati otpornost R_4 tako da bude $U = 8$ V. (*Z900921*)

REŠENJE:
Uvedimo oznake za struje i napone kao na slici 121.2. Po Omovom zakonu,



Slika 121.1



Slika 121.2.

$$I_7 = \frac{U}{R_8} = 1\ \text{mA} . \qquad (121.1)$$

Otpornici otpornosti R_7 i R_8 čine (otpornički) razdelnik napona za koji je

$$U = \frac{R_8}{R_7 + R_8} U_6 , \qquad (121.2)$$

odakle dobijamo $U_6 = 33$ V. Na osnovu Omovog zakona za granu sa strujom I_6, imamo

$$I_6 = I_{AB} = \frac{U_{AB} + E_{AB}}{R_{AB}} = \frac{-U_6 + E}{R_6} = 12\ \text{mA} . \qquad (121.3)$$

Sada je, iz prvog Kirhofovog zakona,

$$I_1 = -I_g - I_7 + I_6 = 2\ \text{mA} , \qquad (121.4)$$

te dalje, prema pravilu za sumiranje napona (114.4),

$$U_2 = U_6 - R_1 I_1 = 11\ \text{V} . \qquad (121.5)$$

Preostale struje grana u kolu su $I_2 = U_2/R_2 = 1$ mA, $I_3 = I_1 - I_2 = 1$ mA i $I_4 = I_3 + I_g = 10$ mA. Konačno,

$$U_4 = U_2 - R_3 I_3 = 10\ \text{V} , \qquad (121.6)$$

pa je tražena otpornost

$$R_4 = \frac{U_4}{I_4} = 1\ \text{k}\Omega . \qquad (121.7)$$

122. U kolu prikazanom na slici 122.1 je $E = 2$ V, $R = 50\ \Omega$, $U_1 = 1$ V i $U_2 = 0,5$ V. Izračunati otpornosti R_1 i R_2. (*P940616*)

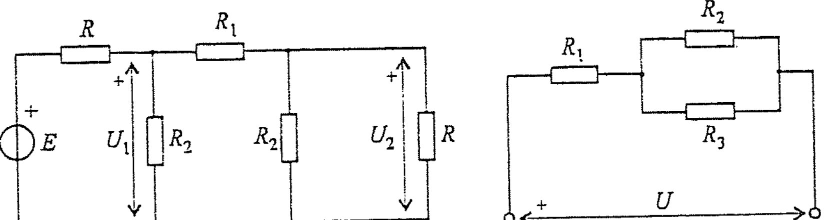
REŠENJE:
Prema jednačini razdelnika napona, ekvivalentna otpornost paralelne veze otpornika otpornosti R_2 i R mora biti jednaka R_1, jer je $U_2 = U_1/2$. Odatle je

$$R_2 R = R_1 (R_2 + R) . \qquad (122.1)$$

Slično tome je $R_2 \parallel (R_1 + R_2 \parallel R) = R$,[5] jer je $U_1 = E/2$, što, zajedno sa (122.1), rezultuje u

$$2 R_2 R_1 = R(R_2 + 2R_1) . \qquad (122.2)$$

Kada izraz za proizvod otpornosti $R_1 R_2$ iz (122.2) uvrstimo u (122.1), dobijamo $R_2 = 4R_1$. Dalje je, rešavanjem jednačine (122.2), $R_1 = 3R/4 = 37,5\ \Omega$. Konačno, $R_2 = 3R = 150\ \Omega$.



Slika 122.1. Slika 123.1.

123. Tri otpornika, otpornosti $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$ i $R_3 = 400\ \Omega$, vezana su u kolo i priključena na napon U kao na slici 123.1. Snage pri kojima ovi otpornici pregorevaju su $P_{1max} = 2$ W, $P_{2max} = 4$ W i $P_{3max} = 2$ W, respektivno. Napon U se vrlo sporo menja od 0 do 50 V. Kojim redosledom će otpornici pregoreti? Smatrati da se otpornosti ne menjaju sa temperaturom sve do pregorevanja. (*P960904*)

[5] $R_a \parallel R_b = R_a R_b / (R_a + R_b)$

REŠENJE:
Neka je U_{23} napon paralelne veze otpornika otpornosti R_2 i R_3, a I_1 struja otpornika otpornosti R_1. Snage pojedinih otpornika, P_1, P_2 i P_3, zadovoljavaju sledeće relacije:

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{U_{23}^2/R_2}{U_{23}^2/R_3} = \frac{R_3}{R_2} = 4 , \qquad (123.1)$$

$$\frac{P_1}{P_2+P_3} = \frac{R_1 I_1^2}{R_{23} I_1^2} = \frac{R_1}{R_{23}} = \frac{1}{4} , \qquad (123.2)$$

gde je $R_{23} = R_2 \parallel R_3 = 80\ \Omega$.

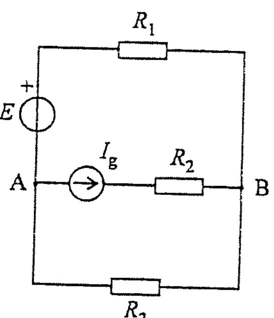
Pretpostavimo da prvo pregoreva R_1, tj. $P_1 = P_{1max} = 2$ W. Tada je, na osnovu veza (123.1) i (123.2), $P_2 = 6,4$ W $> P_{2max}$, što je nemoguće. Kada je, međutim, $P_2 = P_{2max} = 4$ W, tada je $P_3 = 1$ W $< P_{3max}$ i $P_1 = 1,25$ W $< P_{1max}$. Dakle, prvo će pregoreti R_2 (pri naponu $U = 20$ V).

U kolu preostaje redna veza otpornika otpornosti R_1 i R_3. Kako je sada

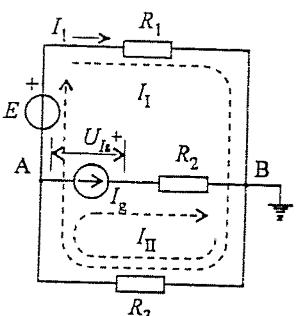
$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{R_1}{R_3} , \qquad (123.3)$$

prema datim brojnim podacima očigledno je da sledeći pregoreva otpornik otpornosti R_3. Pri tome je $U = 29,7$ V. Time desni kraj otpornika otpornosti R_1 postaje slobodan, te ovaj otpornik ne pregoreva tokom daljeg povećavanja napona U.

124. Za kolo stalne struje prikazano na slici 124.1 je $E = 40$ V, $R_1 = R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$ i snaga koju razvija idealan naponski generator $P_E = 8$ W. Izračunati snagu koju razvija idealan strujni generator i snagu koju prima grana koja sadrži taj generator i otpornik otpornosti R_2. (*P960917*)



Slika 124.1.



Slika 124.2

REŠENJE:
Prema oznakama sa slike 124.2, $I_1 = P_E/E = 0,2$ A i $U_{AB} = R_1 I_1 - E = -20$ V.

Po metodi konturnih struja,

$$(R_1 + R_3)I_1 + R_3 I_g = E , \qquad (124.1)$$

odakle je $I_g = -0,1$ A.

Gornji rezultat možemo dobiti i primenom metode potencijala čvorova, po kojoj je

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right) U_{AB} = -\frac{E}{R_1} - I_g , \qquad (124.2)$$

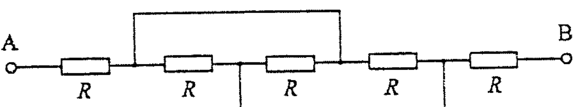
pri čemu se, na osnovu teoreme strujne kompenzacije, redna veza idealnog strujnog generatora I_g i otpornika otpornosti R_2 svodi samo na idealan strujni generator I_g.

Napon idealnog strujnog generatora je $U_{I_g} = -U_{AB} + R_2 I_g = 10$ V, pa je njegova snaga $P_{I_g} = U_{I_g} I_g = -1$ W. Snaga grane koja sadrži idealan strujni generator je $P_{AB} = U_{AB} I_g = 2$ W.

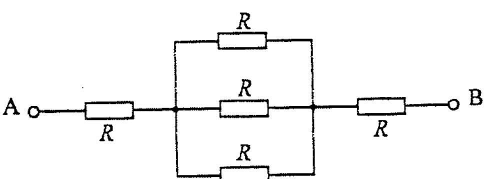
125. Izračunati ekvivalentnu otpornost mreže otpornika prikazane na slici 125.1. (*P950614*)

REŠENJE:
Data mreža se može nacrtati i kao na slici 125.2, odakle ekvivalentna otpornost između priključaka A i B očigledno iznosi

$$R_{AB} = R + \frac{R}{3} + R = \frac{7R}{3} \qquad (125.1)$$



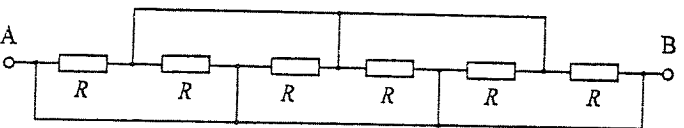
Slika 125.1.



Slika 125.2.

126. Izračunati ekvivalentnu otpornost R_{AB} mreže otpornika prikazane na slici 126.1. (*P940829*)

REŠENJE:
S obzirom da između tačaka A i B postoji kratak spoj, to je $R_{AB} = 0$.

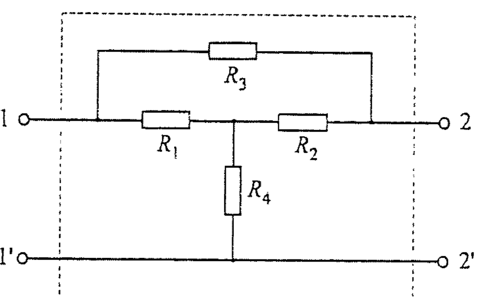


Slika 126.1.

127. Za mrežu sa dva pristupa prikazanu na slici 127.1 poznato je: $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 200\ \Omega$ i $R_3 = 800\ \Omega$. Odrediti ekvivalentnu otpornost između krajeva 1 i 1' kada su krajevi 2 i 2' (a) kratko spojeni, odnosno (b) otvoreni. (*P950123*)

REZULTAT:
Tražene otpornosti su: (a) $R_{11'} = 160\ \Omega$ i (b) $R_{11'} = 290,9\ \Omega$.

128. Izračunati ekvivalentnu otpornost mreže prikazane na slici 128.1 ako je $R = 100\ \Omega$. (*P960613*)



Slika 127.1.

REŠENJE:
Zamislimo da je data otpornička mreža priključena na napon U_{AB}. Po definiciji, ekvivalentna otpornost mreže je

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}, \qquad (128.1)$$

gde je I jačina struje kroz priključke mreže (slika 128.2).

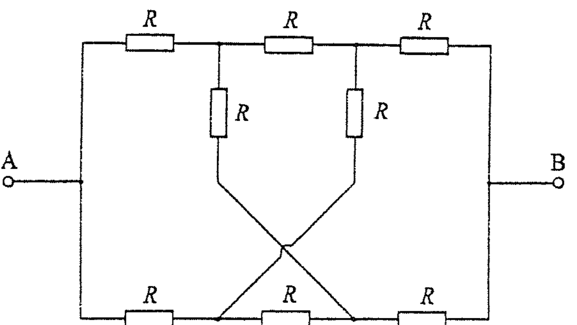
Zbog simetrije, tačke 1 i 2 su na istom potencijalu, pa se mogu kratko spojiti. Isto važi i za par tačaka 3 i 4. Sada se mreža može nacrtati kao na slici 128.3, odakle je očigledno

$$R_{AB} = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{5R}{4} = 125\ \Omega\,. \qquad (128.2)$$

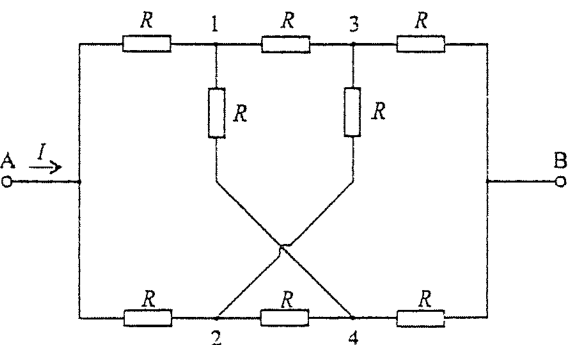
129. Za mrežu prikazanu na slici 129.1 je $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$, $R_4 = 400\ \Omega$ i $R_5 = 200\ \Omega$. Izračunati ekvivalentnu otpornost mreže, R_{AB}.

REŠENJE:
Ako se, u cilju određivanja ekvivalentne otpornosti mreže, između tačaka A i B veže test generator, struja i napon otpornika otpornosti R_3 su jednaki nuli, jer je most u ravnoteži, naime, ispunjen je uslov

$$R_1 R_5 = R_2 R_4\,. \qquad (129.1)$$



Slika 128.1.



Slika 128.2.

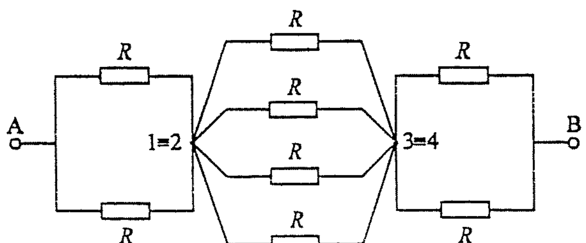
Stoga se, po teoremi kompenzacije, grana sa R_3 može zameniti otvorenom vezom (strujna kompenzacija) ili kratkim spojem (naponska kompenzacija), te je

$$R_{AB} = (R_1 + R_2) \parallel (R_4 + R_5) = 200\ \Omega \quad \text{ili} \quad R_{AB} = R_1 \parallel R_4 + R_2 \parallel R_5 = 200\ \Omega\,. \qquad (129.2)$$

Zadatak se može rešiti i transfiguracijom zvezde otpornika otpornosti R_1, R_2 i R_3 u trougao, ili trougla koji čine otpornici otpornosti R_1, R_3 i R_4 u zvezdu, te svođenjem dobijene redno-paralelene veze otpornika na jedan ekvivalentan otpornik, otpornosti $R_{AB} = 200\ \Omega$.

130. Izračunati otpornosti zvezde ekvivalentne mreži otpornika prikazanoj na slici 130.1. (*P940919*)

REŠENJE:
Otpornosti ekvivalentne zvezde možemo odrediti tranfiguracijom date mreže otpornika. Na primer, nakon zamene tri paralelno vezana otpornika u sredini jed-



Slika 128.3.

nim otpornikom, zvezdu u sredini transfigurišemo u trougao, za koji je, prema slici 130.2, $R_1 = 5R/3$ i $R_2 = 5R$. Zatim, paralelne veze otpornika otpornosti R i R_1 zamenimo ekvivalentnim otpornostima, čime dobijamo samo jedan trougao otpornika, sa temenima A, B i C. Konačno, otpornosti ekvivalentne zvezde su $R_A = R/16$ i $R_B = R_C = R/2$.

Slika 129.1.

Do istog rezultata možemo doći i računanjem ekvivalentnih otpornosti između određenih parova tačaka. Pretpostavimo da je tačka A slobodna i odredimo ekvivalentnu otpornost između tačaka B i C (slika 130.3). Zbog simetrije, tačke A i D su na istom potencijalu, te se paralelna veza tri otpornika u sredini može zameniti kratkim spojem (ili otvorenom vezom). Na taj način,

$$R_{BC} = R \,. \qquad (130.1)$$

Kako je za ekvivalentnu zvezdu

$$R_{BC} = R_B + R_C = 2R_B \qquad (130.2)$$

(otpornosti R_B i R_C su jednake zbog simetrije), to je $R_B = R_C = R/2$.

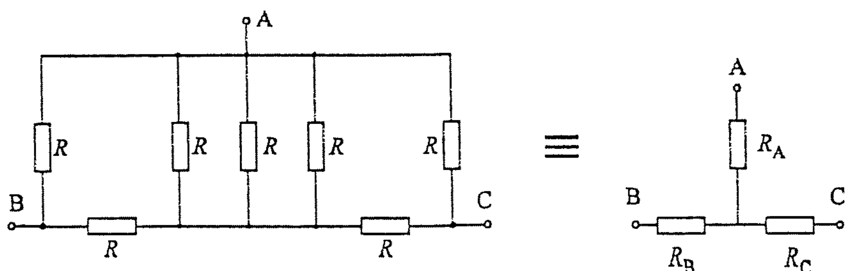
Ako se, međutim, tačke B i C spoje (slika 130.4), ekvivalentna otpornost između tih tačaka i tačke A je

$$R_{A(BC)} = R \parallel \left(\frac{R}{3} + \frac{R}{2}\right) \parallel R = \frac{5R}{16} \,. \qquad (130.3)$$

Za ekvivalentnu zvezdu je

$$R_{A(BC)} = R_A + R_B \parallel R_C = R_A + \frac{R}{4} \,, \qquad (130.4)$$

pa dobijamo $R_A = R/16$.



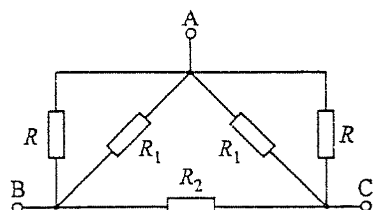
Slika 130.1.

131. Izračunati ekvivalentnu otpornost mreže otpornika prikazane na slici 131.1 ako je $R_1 = R_3 = R_4 = 3$ kΩ, $R_2 = 1$ kΩ, $R_5 = R_8 = 9$ kΩ, $R_6 = 2,25$ kΩ i $R_7 = 1$ kΩ. (*P930905*)

REZULTAT:
Ekvivalentna otpornost je $R_{AB} = 2$ kΩ.

132. U kolu prikazanom na slici 132.1 je $E = 24$ V, $I_g = 18$ mA, $R_1 = R_2 = 1$ kΩ i $R_3 = 400$ Ω. Zameniti deo kola levo od tačaka 1 i 2 ekvivalentnim naponskim generatorom po (a) Tevenenovoj teoremi i (b) teoremi kompenzacije. (*P930409*)

REŠENJE:
(a) Elektromotorna sila i unutrašnja otpornost ekvivalentnog Tevenenovog generatora, skiciranog na slici 132.2, su, prema slikama 132.3 i 132.4,



Slika 130.2.

$$E_T = (U_{12})_{ph} = E + R_2 I_g = 42 \text{ V} \,,$$

$$R_T = R_{e12} = R_2 = 1 \text{ k}\Omega \,, \qquad (132.1)$$

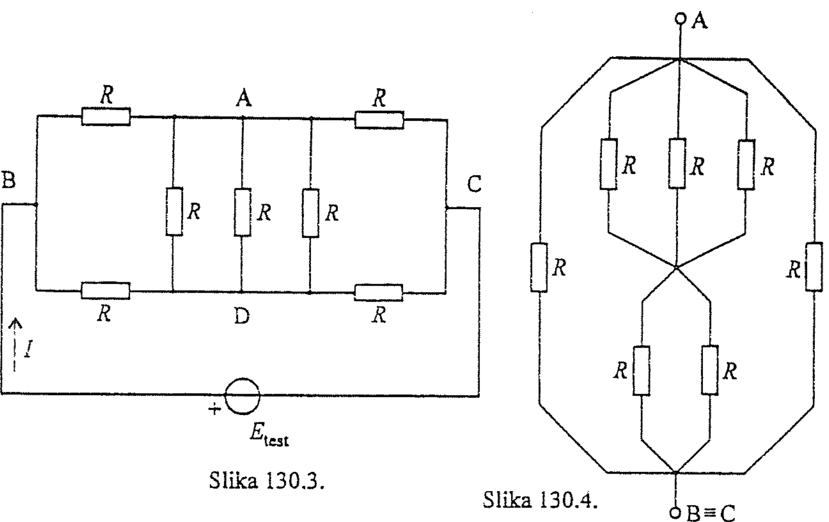
respektivno. $(U_{12})_{ph}$ je napon praznog hoda dela kola koji zamenjujemo ekvivalentnim generatorom, a R_{e12} ekvivalentna otpornost tog dela kola, pri čemu je odstranjeno dejstvo generatora.

(b) Elektromotorna sila ekvivalentnog kompenzacionog naponskog generatora, skiciranog na slici 132.5, je

$$E_k = U_{12} = \frac{R_3}{R_T + R_3} E_T = 12 \text{ V} \,, \qquad (132.2)$$

gde je U_{12} napon između tačaka 1 i 2 u kolu sa slike 132.1.

Odrediti parametre ekvivalentnih naponskih generatora ako se otpornost R_3 udvostruči.



Slika 130.3.

Slika 130.4.

133. Deo kola, prikaznanog na slici 133.1, levo od tačaka A i B zameniti ekvivalentnim strujnim generatorom po (a) teoremi kompenzacije i (b) Nortonovoj teoremi. Poznato je $E_1 = 2$ V, $E_2 = 1$ V, $E_3 = 3$ V, $E_4 = 4$ V, $I_{g1} = 1$ mA, $I_{g2} = 2$ mA, $I_{g3} = 3$ mA, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ i $R_3 = R_4 = R_5 = 4$ kΩ. Skicirati svaki od tih generatora i jasno označiti referentni smer struje. (*P950924*)

REŠENJE:

(a) Jačina struje ekvivalentnog kompenzacionog strujnog generatora, skiciranog na slici 133.2, jednaka je jačini struje kroz tačke A i B kola sa slike 133.1,

$$I_k = I_{R_4} = -I_{g2} - I_{g3} = -5 \text{ mA}, \qquad (133.1)$$

gde je I_{R_4} jačina struje kroz otpornik otpornosti R_4, za referentni smer struje nadesno.

(b) Jačina struje ekvivalentnog Nortonovog generatora, skiciranog na slici 133.3, jednaka je jačini struje kratkog spoja, I_{ks}, dela kola levo od tačaka A i B (slika 133.4). Po prvom i drugom Kirhofovom zakonu,

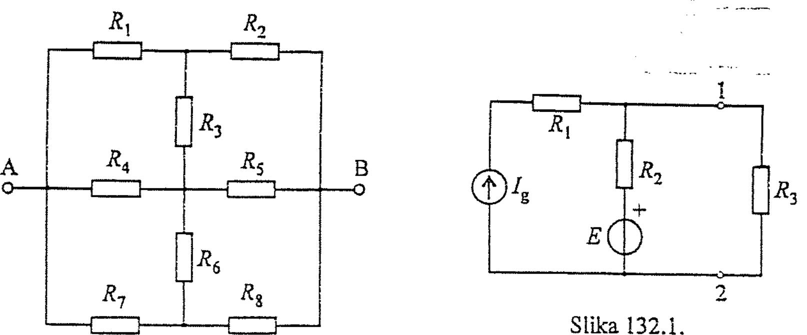
$$I_{g1} + I_1 + I_{ks} = 0, \qquad (133.2)$$

$$E_2 + R_3 I_1 - R_4 I_{ks} - E_3 = 0, \qquad (133.3)$$

odakle je $I_N = I_{ks} = -0,75$ mA.

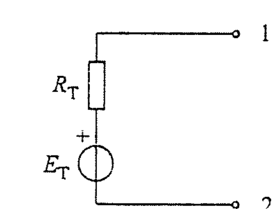
Unutrašnja provodnost Nortonovog generatora je

$$G_N = G_{eAB} = \frac{1}{R_3 + R_4} = 0,125 \text{ mS}. \qquad (133.4)$$

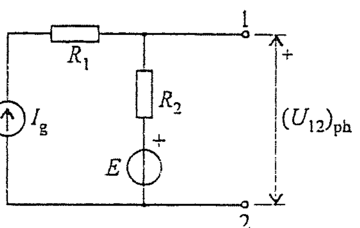


Slika 131.1

Slika 132.1.



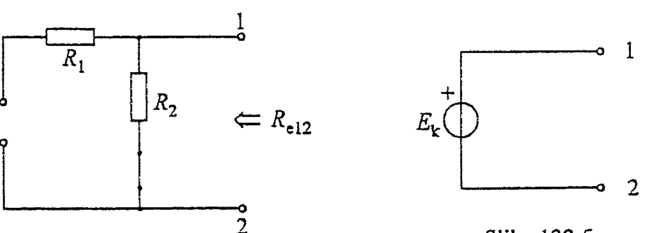
Slika 132.2.



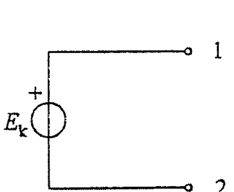
Slika 132.3.

Primenom teoreme kompenzacije i Nortonove teoreme odrediti odgovarajuće strujne generatore kojima se može zameniti deo kola desno od tačaka A i B. Da li se taj deo kola može zameniti ekvivalentnim generatorom po Tevenenovoj teoremi?

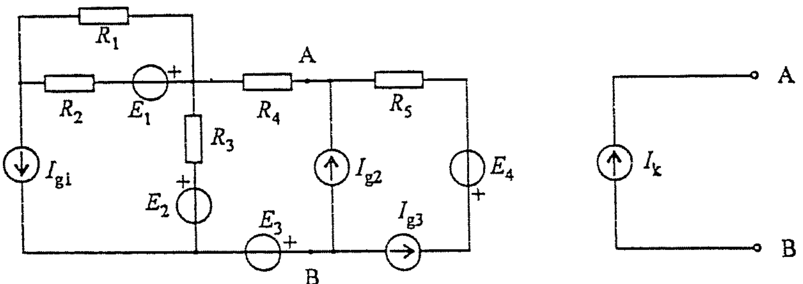
134. Dva realna naponska generatora vezana su paralelno, kao što je prikazano na slici 134.1. Poznato je $E_1 = E_2 = 10$ V, $R_1 = 6$ Ω i $R_2 = 4$ Ω. Izračunati parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora. (*P920627*)



Slika 132.4.

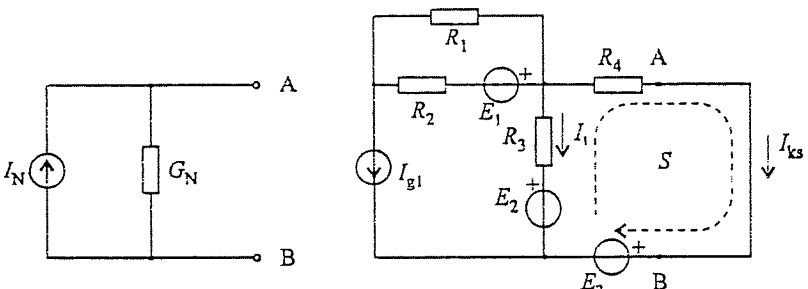


Slika 132.5.

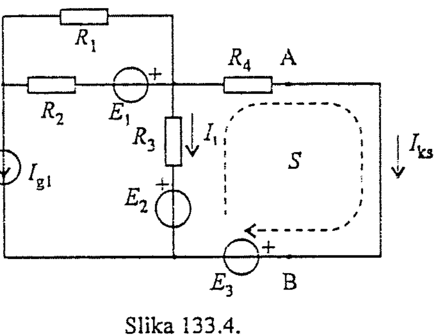


Slika 133.1.

Slika 133.2.



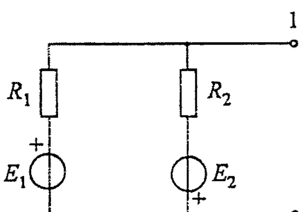
Slika 133.3.



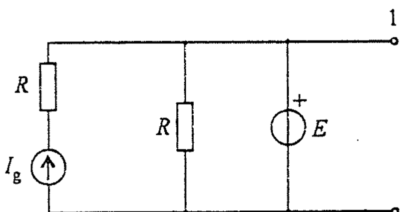
Slika 133.4.

REŠENJE:
Prema slici 132.2, parametri ekvivalentnog Tevenenovog generatora su

$$E_T = \frac{E_1 R_2 - E_2 R_1}{R_1 + R_2} = -2\ \text{V}, \qquad R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2,4\ \Omega. \tag{134.1}$$



Slika 134.1.

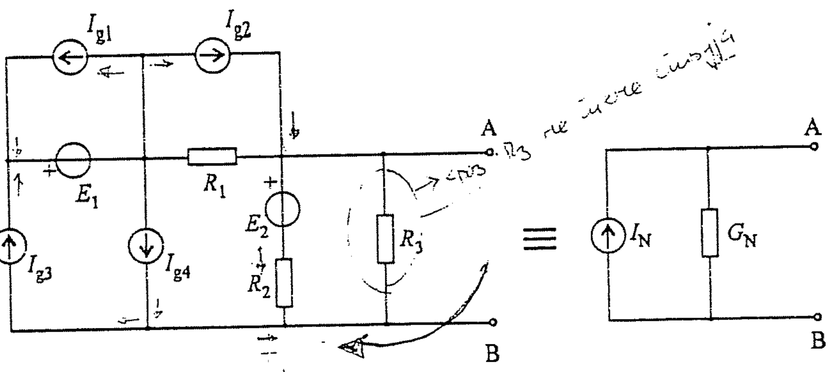


Slika 135.1.

135. Odrediti parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora za mrežu prikazanu na slici 135.1, ako je $E = 10$ V, $I_g = 1$ A i $R = 20\ \Omega$. (*P920403*)

REŠENJE:
Prema slici 132.2, traženi parametri su $E_T = 10$ V i $R_T = 0$.

136. Izračunati parametre ekvivalentnog Nortonovog generatora za mrežu prikazanu na slici 136.1, ako je $E_1 = 2$ V, $E_2 = 1$ V, $I_{g1} = 1$ mA, $I_{g2} = 2$ mA, $I_{g3} = 3$ mA, $I_{g4} = 5$ mA, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ i $R_3 = 4$ kΩ. (*P950903*)



Slika 136.1.

REŠENJE:
Kada se priključci A i B kratko spoje, jačina struje kroz otpornik otpornosti R_3 je nula. Prema Omovom zakonu za granu (121.3), jačina struje u grani sa E_2 i R_2 je $I_{AB} = -E_2/R_2$. Sada je, na osnovu prvog Kirhofovog zakona za čvor B, jačina struje ekvivalentnog Nortonovog generatora

$$I_N = I_{g3} - I_{g4} + \frac{E_2}{R_2} = -1,5\ \text{mA}. \tag{136.1}$$

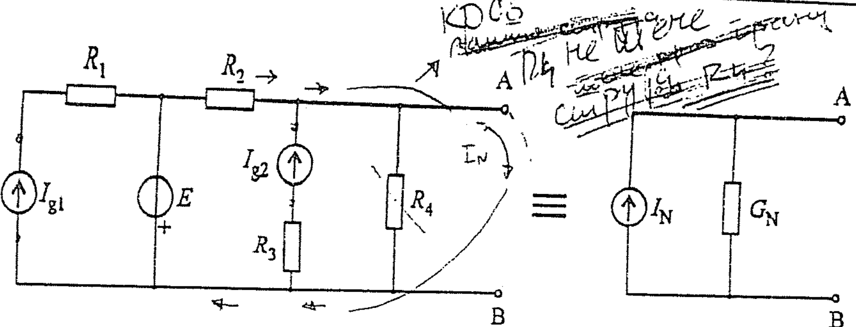
Unutrašnja provodnost generatora je

$$G_N = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} = 0,75\ \text{mS}. \tag{136.2}$$

137. Izračunati parametre ekvivalentnog Nortonovog generatora za mrežu prikazanu na slici 137.1, ako je $E = 1$ V, $I_{g1} = 10$ mA, $I_{g2} = 12$ mA, $R_1 = 300\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$ i $R_3 = R_4 = 100\ \Omega$. (*P950614*)

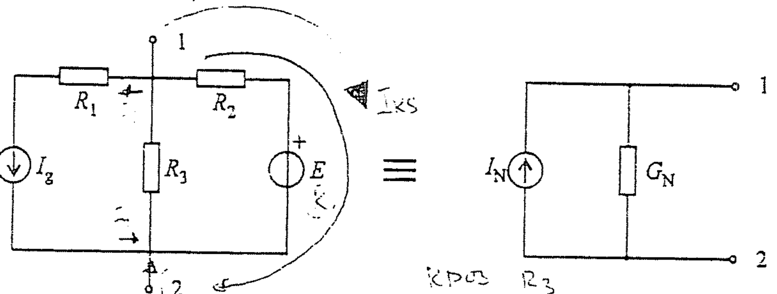
REŠENJE:
Parametri ekvivalentnog Nortonovog generatora su

$$I_N = I_{g2} - \frac{E}{R_2} = 7\ \text{mA}, \qquad G_N = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} = 15\ \text{mS}. \tag{137.1}$$



Slika 137.1.

138. Izračunati parametre Nortonovog generatora za priključke 1 i 2 mreže stalne struje prikazane na slici 138.1, ako je $E = 1$ V, $I_g = 1$ mA, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 500$ Ω i $R_3 = 2$ kΩ. (*P940616*)



Slika 138.1.

REZULTAT:
Traženi parametri su $I_N = 1$ mA i $G_N = 2,5$ mS.

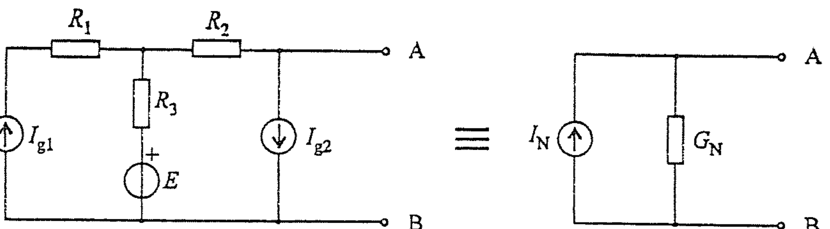
139. Izračunati parametre ekvivalentnog Nortonovog generatora za mrežu prikazanu na slici 139.1, ako je $E = 1$ V, $I_{g1} = 10$ mA, $I_{g2} = 12$ mA, $R_1 = 100$ Ω, $R_2 = 200$ Ω i $R_3 = 300$ Ω. (*P940919*)

REŠENJE:
Po teoremi superpozicije, struja kratkog spoja mreže je (slika 139.2)

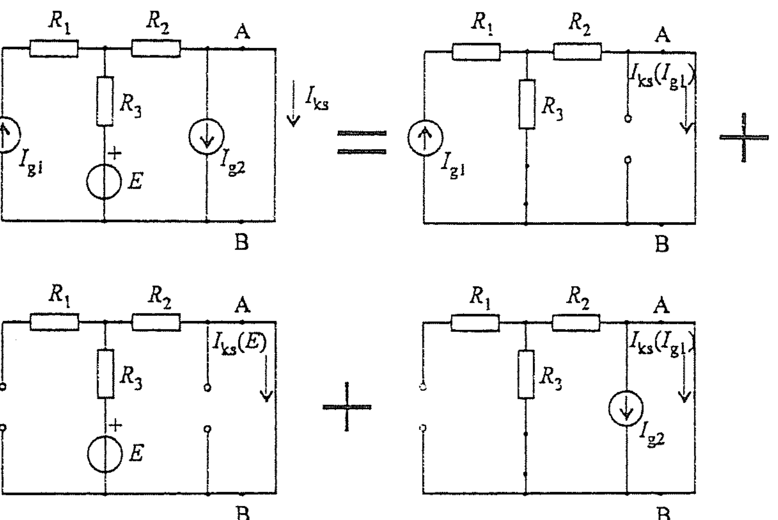
$$I_{ks} = \underbrace{\frac{R_3}{R_2+R_3} I_{g1}}_{I_{ks}(I_{g1})} + \underbrace{\frac{E}{R_2+R_3}}_{I_{ks}(E)} + \underbrace{(-I_{g2})}_{I_{ks}(I_{g2})} = -4 \text{ mA} , \qquad (139.1)$$

gde $I_{ks}(I_{g1})$, $I_{ks}(E)$ i $I_{ks}(I_{g2})$ predstavljaju struje kratkog spoja kao odzive mreže na svaku pojedinačnu eksitaciju. Za računanje struje $I_{ks}(I_{g1})$ upotrebljena je formula za strujni razdelnik.

Parametri ekvivalentnog Nortonovog generatora su $I_N = I_{ks}$ i $G_N = 1/(R_2 + R_3) = 2$ mS.



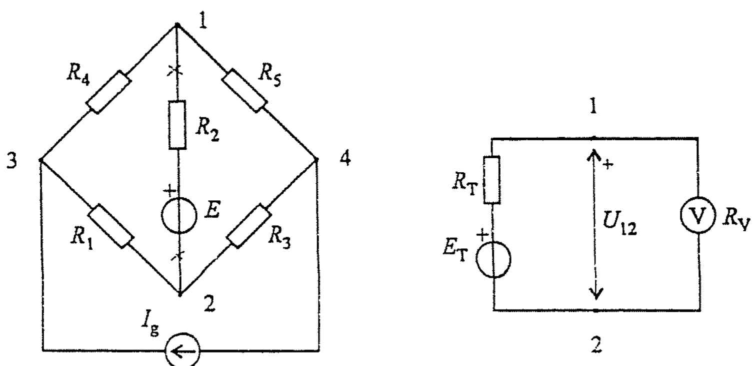
Slika 139.1.



Slika 139.2.

140. Za kolo prikazano na slici 140.1 je $E = 24$ V, $I_g = 20$ mA, $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 20$ kΩ, $R_3 = 5$ kΩ, $R_4 = 3$ kΩ i $R_5 = 15$ kΩ. Odrediti za kolo, u odnosu na granu između čvorova 1 i 2, (a) Nortonov generator i (b) kompenzacioni strujni generator. (*P950123*)

REZULTAT:
Tražene veličine su: (a) $I_{N12} = -3$ mA, $G_N = 0,25$ mS i (b) $I_{k12} = 0,5$ mA.



Slika 140.1.

Slika 141.1.

141. Kolika je relativna greška merenja napona između dve tačke u kolu stalne struje, ako je otpornost voltmetra R_V, a ekvivalentna otpornost između tih tačaka R_e? (*P920205*)

REŠENJE:
U odnosu na priključke voltmetra kolo se može zameniti Tevenenovim generatorom, parametara E_T i $R_T = R_e$ (slika 141.1). Izmereni napon je

$$U_{12} = \frac{R_V}{R_T + R_V} E_T . \qquad (141.1)$$

Kako je stvarni napon $U'_{12} = (U_{12})_{ph} = E_T$, relativna greška merenja napona je

$$\delta_{U_{12}} = \frac{U_{12} - U'_{12}}{U'_{12}} = -\frac{1}{1 + \frac{R_V}{R_e}} . \qquad (141.2)$$

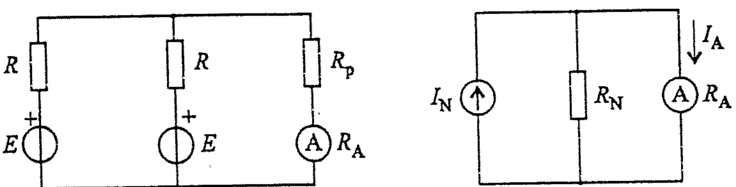
Zaključujemo da realan voltmetar pokazuje manji napon od stvarnog napona.

142. U kolu prikazanom na slici 142.1 poznato je $R = 30\ \Omega$ i $R_p = 6\ \Omega$. Ampermetar, unutrašnje otpornosti $R_A = 1\ \Omega$, pokazuje struju $I_A = 10,5$ mA. Izračunati struju prijemnika otpornosti R_p pre priključenja ampermetra. (*P960401*)

REŠENJE:
U odnosu na ampermetar ostatak kola se može zameniti Nortonovim generatorom, parametara I_N i $R_N = R/2 + R_p = 21\ \Omega$ (slika 142.2). Jačina struje koju pokazuje ampermetar je

$$I_A = \frac{R_N}{R_N + R_A} I_N , \qquad (142.1)$$

odakle je jačina struje prijemnika otpornosti R_p pre priključenja ampermetra $I'_p = I_N = 11$ mA.



Slika 142.1.

Slika 142.2.

143. Voltmetrom unutrašnje otpornosti $R_{V1} = 10$ kΩ izmeren je napon $U_{12} = 12$ V između tačaka 1 i 2 jednog kola stalne struje. Zatim je voltmetrom unutrašnje otpornosti $R_{V2} = 20$ kΩ između istih tačaka izmeren napon $U'_{12} = 16$ V. Koliki će biti rezultat merenja napona voltmetrom unutrašnje otpornosti $R_{V3} = 30$ kΩ? (*P930624*)

REZULTAT:
Traženi napon je $U''_{12} = 18$ V.

144. Kada se jačina struje jedne grane kola stalne struje meri ampermetrom unutrašnje otpornosti $R_{A1} = 100$ mΩ, dobija se rezultat $I_1 = 12$ A, a kada se meri ampermetrom unutrašnje otpornosti $R_{A2} = 50$ mΩ, dobija se rezultat $I_2 = 15$ A. Kolika je jačina struje te grane kada u nju nije uključen ampermetar? (*P940829*)

REZULTAT:
Jačina struje grane kada u nju nije uključen ampermetar iznosi 20 A.

145. Napon praznog hoda jednog realnog naponskog generatora stalne elektromotorne sile je $U_{ph} = 100$ V, a struja kratkog spoja $I_{ks} = 0,4$ A. Kolika treba da bude otpornost prijemnika priključenog na taj generator da bi snaga prijemnika bila maksimalna, i kolika je ta snaga? (*P910628*)

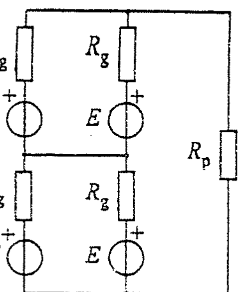
REŠENJE:
Elektromotorna sila datog realnog naponskog generatora je $E = U_{ph} = 100$ V, a unutrašnja otpornost

$$R_g = \frac{U_{ph}}{I_{ks}} = 250\ \Omega . \qquad (145.1)$$

Prema izrazima (120.2), maksimalna snaga prijemnika je $(P_p)_{max} = 10$ W, pri otpornosti prijemnika $R_p = 250\ \Omega$.

146. Elektromotorna sila svakog od četiri identična generatora je $E = 10$ V i otpornost $R_g = 1\ \Omega$. (a) Kako treba vezati ove generatore sa prijemnikom ot-

pornosti $R_p = 1\ \Omega$ da bi snaga prijemnika bila maksimalna? (b) Kolika je ta snaga? (*P960613*)



Slika 146.1.

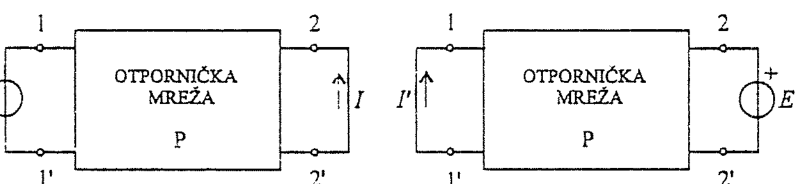
REŠENJE:

(a) Generatore treba vezati mešovito: dva paralelno na red sa paralelnom vezom druga dva generatora (slika 146.1), ili dva na red u paraleli sa rednom vezom druga dva. Naime, na taj način je zadovoljen uslov za maksimalnu snagu prijemnika, $R_T = R_p$, gde je R_T otpornost Tevenenovog generatora kojim se može zameniti veza datih generatora prema prijemniku.

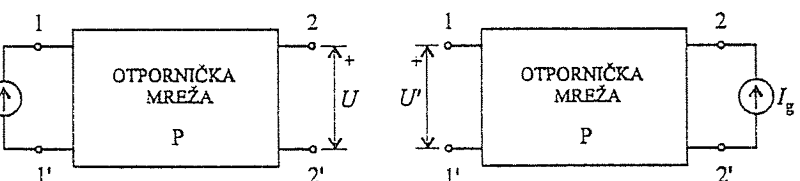
(b) Koristeći se formulom (134.1), elektromotorna sila ekvivalentnog Tevenenovog generatora je $E_T = 2E = 20$ V. Maksimalna snaga prijemnika, na osnovu (120.2), iznosi $(P_p)_{max} = 100$ W.

147. Navesti formulaciju teoreme reciprociteta za kola stalnih struja. Naglasiti pod kojim uslovima teorema važi. (*P960904*)

REŠENJE:



Slika 147.1.



Slika 147.2.

Po teoremi reciprociteta, za kola sa slika 147.1 i 147.2 je $I' = I$ i $U' = U$, respektivno.[6] Kao što se vidi, teorema važi za kola sa samo jednim generatorom. Svi

[6] Ovo su dve formulacije teoreme reciprociteta.

otpornici u mreži P moraju biti linearni.

148. Izračunati otpornosti R_1, R_2 i R_3 tako da mreža prikazana na slici 148.1 ima r–parametre $r_{11} = 1\ \text{k}\Omega$, $r_{12} = r_{21} = 600\ \Omega$ i $r_{22} = 800\ \Omega$. (*P950904*)

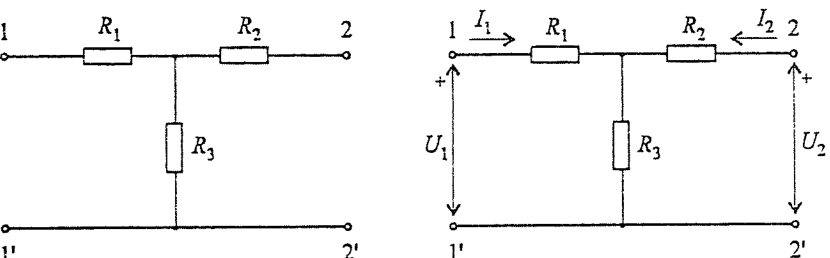
REŠENJE:

Usvojimo referentne smerove za napone i struje na pristupima mreže kao na slici 148.2. Po definiciji,

$$U_1 = r_{11}I_1 + r_{12}I_2\ , \tag{148.1}$$

$$U_2 = r_{21}I_1 + r_{22}I_2\ , \tag{148.2}$$

gde r_{11}, r_{12}, r_{21} i r_{22} predstavljaju r–parametre mreže ($r_{12} = r_{21}$, po teoremi reciprociteta).



Slika 148.1. Slika 148.2.

Na osnovu teoreme kompenzacije, struje I_1 i I_2 možemo predstaviti kao eksitacije (slika 148.3), pa odzive U_1 i U_2 odrediti primenom teoreme superpozicije,

$$U_1 = (R_1 + R_3)I_1 + R_3 I_2\ , \tag{148.3}$$

$$U_2 = R_3 I_1 + (R_2 + R_3)I_2\ . \tag{148.4}$$

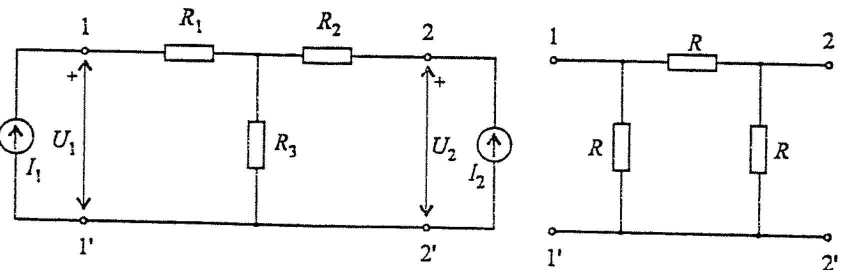
Upoređivanjem jednačina (148.3) i (148.4) sa jednačinama (148.1) i (148.2), dobijamo

$$R_1 = r_{11} - r_{12} = 400\ \Omega\ , \quad R_2 = r_{22} - r_{12} = 200\ \Omega\ , \quad R_3 = r_{12} = 600\ \Omega\ . \tag{148.5}$$

149. Izračunati r–parametre otporničke mreže prikazane na slici 149.1 ako je $R = 12\ \text{k}\Omega$. (*P950125*)

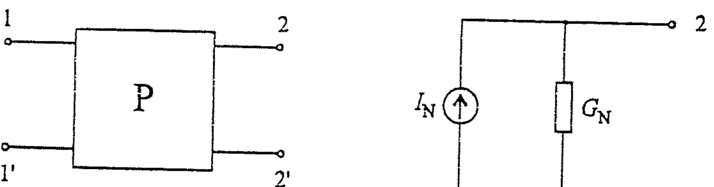
REZULTAT:

Parametri su $r_{11} = 8\ \text{k}\Omega$, $r_{12} = r_{21} = 4\ \text{k}\Omega$ i $r_{22} = 8\ \text{k}\Omega$.

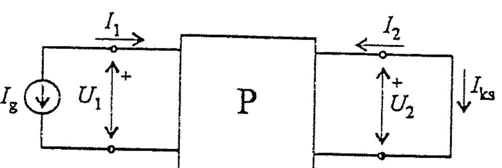


Slika 148.3. Slika 149.1.

150. Otpornička mreža sa dva para krajeva, prikazana na slici 150.1, ima parametre g_{11}, $g_{12} = g_{21}$ i g_{22}. Izračunati karakteristike Nortonovog generatora u odnosu na desni par krajeva ako je između levog para krajeva priključen idealni strujni generator struje I_g, čiji je referentni smer od čvora 1 ka čvoru 1'. Skicirati Nortonov generator. (*P960130*)



Slika 150.1. Slika 150.2.

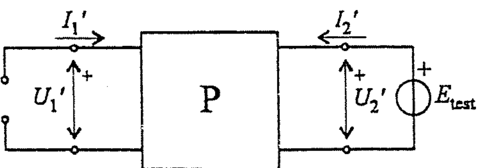


Slika 150.3.

REŠENJE:
Uvedimo referentni smer za struju Nortonovog generatora kao na slici 150.2. Jačinu te struje, I_N, određujemo na osnovu mreže sa slike 150.3. Veze između struja i napona na pristupima date otporničke mreže preko g-parametara glase

$$I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}U_2 \,, \tag{150.1}$$

$$I_2 = g_{21}U_1 + g_{22}U_2 \,. \tag{150.2}$$



Slika 150.4.

Kako je $I_1 = -I_g$, $I_2 = -I_{ks}$ i $U_2 = 0$, gornje relacije rezulutuju u

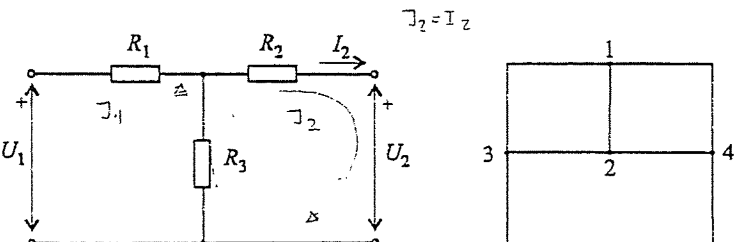
$$I_N = I_{ks} = \frac{g_{21}}{g_{11}} I_g \,. \tag{150.3}$$

U cilju određivanja unutrašnje provodnosti Nortonovog generatora, G_N, posmatramo kolo sa slike 150.4. Sada je $I_1' = 0$ i $U_2' = E_{test}$, pa na osnovu veza (150.1) i (150.2) dobijamo

$$G_N = \frac{I_2'}{E_{test}} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}{g_{11}} \,. \tag{150.4}$$

151. Za kolo prikazano na slici 151.1 poznato je $U_1 = 10$ V ($U_1 = \text{const}$), $R_1 = R_2 = 1$ kΩ i $R_3 = 2$ kΩ. Odrediti izraz za intenzitet struje I_2 u funkciji napona U_2. (*P960401*)

REZULTAT:
Intenzitet struje I_2 je $I_2 = (4 - 0,6U_2)$ mA, pri čemu je napon U_2 izražen u voltima.



Slika 151.1. Slika 152.1.

152. Na primeru kola čiji je graf prikazan na slici 152.1, dokazati teoremu održanja snage u kolima stalne struje. (*P960925*)

REŠENJE:
Po teoremi održanja snage, zbir snaga koje primaju grane proizvoljnog kola stalne struje jednak je nuli.

U cilju dokaza teoreme, na primeru datoga kola, označimo struje grana po dvoindeksnoj konvenciji, sa I_{12}, I_{13}, I_{14}, I_{23}, I_{24} i I_{34}. Jednačine po prvom Kirhofovom zakonu za sve čvorove glase:

$$I_{12} + I_{13} + I_{14} = 0 , \tag{152.1}$$

$$-I_{12} + I_{23} + I_{24} = 0 , \tag{152.2}$$

$$-I_{13} - I_{23} + I_{34} = 0 , \tag{152.3}$$

$$-I_{14} - I_{24} - I_{34} = 0 . \tag{152.4}$$

Pomnožimo prvu jednačinu sa V_1, drugu sa V_2, treću sa V_3 i četvrtu sa V_4, gde su V_1, V_2, V_3 i V_4 potencijali čvorova (u odnosu na proizvoljnu referentnu tačku), i saberimo jednačine. Dobijamo

$$(V_1-V_2)I_{12}+(V_1-V_3)I_{13}+(V_1-V_4)I_{14}+(V_2-V_3)I_{23}+(V_2-V_4)I_{24}+(V_3-V_4)I_{34} = 0 , \tag{152.5}$$

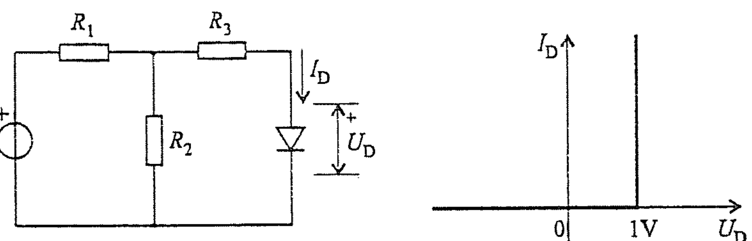
što je i trebalo dokazati, jer je $(V_A - V_B)I_{AB}$ snaga koju prima grana između čvorova A i B.

Gornji identitet se može napisati i na sledeći način:

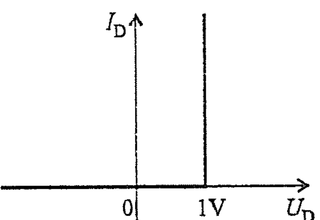
$$\sum (UI)_{\text{generatora}} = \sum (UI)_{\text{prijemnika}} . \tag{152.6}$$

Naime, u proizvoljnom kolu stalne struje, ukupna snaga koju razvijaju generatori jednaka je ukupnoj snazi koju primaju prijemnici.

153. U kolu prikazanom na slici 153.1 poznato je $E = 6$ V, $R_1 = 12$ kΩ, $R_2 = 4$ kΩ i $R_3 = 1$ kΩ, dok je karakteristika diode prikazana na slici 153.2. Izračunati struju diode. (*P950924*)



Slika 153.1.



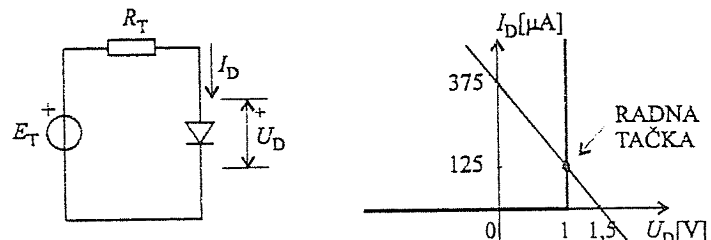
Slika 153.2.

REŠENJE:
U odnosu na diodu, ostatak kola se može zameniti Tevenenovim generatorom elektromotorne sile $E_T = 1,5$ V i otpornosti $R_T = 4$ kΩ (slika 153.3).

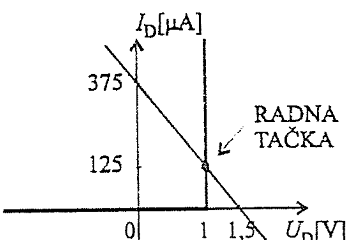
Radna prava generatora data je jednačinom

$$I_D = -\frac{1}{R_T}U_D + \frac{E_T}{R_T} \tag{153.1}$$

i skicirana na slici 153.4. Radna prava seče karakteristiku diode na vertikalnom delu u tački sa apscisom $I_D = 125$ μA.



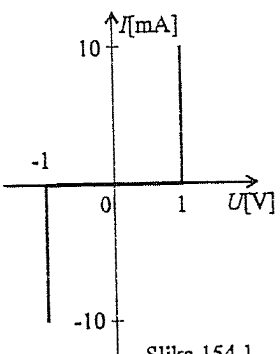
Slika 153.3.



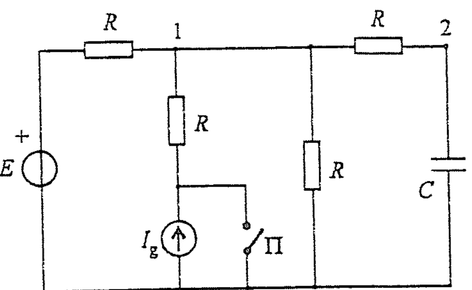
Slika 153.4.

154. Idealan naponski generator elektromotorne sile $E = 5$ V, otpornik otpornosti $R = 1$ kΩ i nelinearni otpornik, čija je karakteristika prikazana na slici 154.1, vezani su u prosto kolo. Izračunati jačinu struje u kolu. (*P920205*)

REZULTAT:
Jačina struje u kolu je 4 mA. Smer struje se poklapa sa smerom elektromotorne sile E.



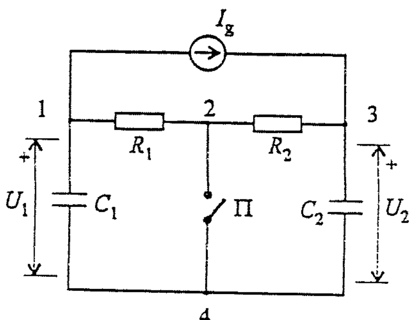
Slika 154.1.



Slika 155.1.

155. U kolu prikazanom na slici 155.1 je $E = 15$ V, $I_g = 5$ mA, $R = 1$ kΩ i $C = 10$ μF. Prekidač Π je otvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje.

Koliki je priraštaj energije kondenzatora po zatvaranju prekidača Π i uspostavljanju novog stacionarnog stanja? (*P960613*)



Slika 156.1.

REŠENJE:
Kada je prekidač otvoren, napon kondenzatora je, prema teoremi superpozicije,

$$U_C = U_{20} = U_{10} = \frac{E}{2} + \frac{R}{2} I_g = 10 \text{ V} , \quad (155.1)$$

a njegova energija $W_e = CU_C^2/2 = 500\ \mu\text{J}$. Kada se prekidač zatvori, napon kondenzatora je

$$U_C' = U_{10}' = \frac{E}{3} = 5 \text{ V} , \quad (155.2)$$

a energija $W_e' = CU_C'^2/2 = 125\ \mu\text{J}$. Priraštaj energije kondenzatora je

$$\Delta W_e = W_e' - W_e = -375\ \mu\text{J} . \quad (155.3)$$

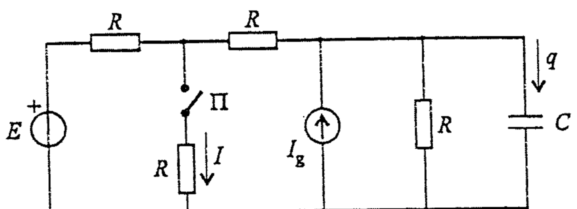
Preporučuje se čitaocu da, radi vežbe, izračuna protok elektriciteta kroz granu sa kondenzatorom od trenutka zatvaranja prekidača do uspostavljanja novog stacionarnog stanja i jačinu struje kroz prekidač u drugom stacionarnom stanju.

156. Za kolo prikazano na slici 156.1 poznato je: $I_g = 0,1$ A, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $C_1 = 0,5\ \mu$F i $C_2 = 0,2\ \mu$F. Pri otvorenom prekidaču Π je $U_1/U_2 = 0,2$. Odrediti protekle količine elektriciteta kroz grane sa kondenzatorima od trenutka zatvaranja prekidača Π do uspostavljanja stacionarnog stanja u kolu. (*P950123*)

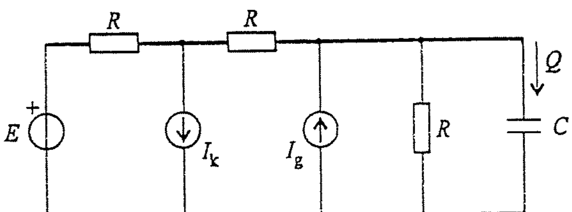
REZULTAT:
Protoci su $q_{14} = -10\ \mu$C i $q_{34} = -4\ \mu$C.

157. U kolu prikazanom na slici 157.1 poznato je $R = 1$ kΩ i $C = 1\ \mu$F. Prekidač Π je otvoren i uspostavljeno je stacionarno stanje. Zatim se prekidač Π zatvori. Do uspostavljanja novog stacionarnog stanja kroz granu sa kondenzatorom protekne naelektrisanje $q = 10\ \mu$C. Izračunati jačinu struje I u drugom stacionarnom stanju. (*P940919*)

REŠENJE:
Grana sa prekidačem se može zameniti kompenzacionim strujnim generatorom jačine struje I_k (slika 157.2), gde je $I_k = 0$ u stacionarnom stanju kada je prekidač otvoren, a $I_k = I$ u stacionarnom stanju kada je prekidač zatvoren. Po teoremi



Slika 157.1.



Slika 157.2.

superpozicije, opterećenost kondenzatora u stacionarnim stanjima jednaka je zbiru opterećenosti kao odziva na pojedine eksitacije,

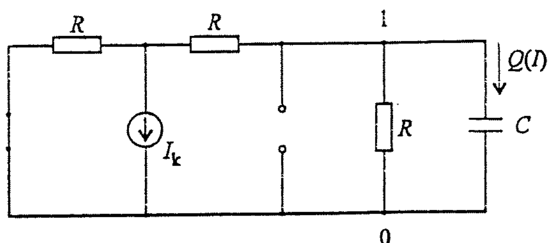
$$Q = Q(E) + Q(I_g) + Q(I_k) . \quad (157.1)$$

Sada je očigledno da je priraštaj opterećenosti kondenzatora, ΔQ, prouzrokovan zatvaranjem prekidača Π, jednak opterećenosti $Q(I)$, koja, prema slici 157.3, iznosi

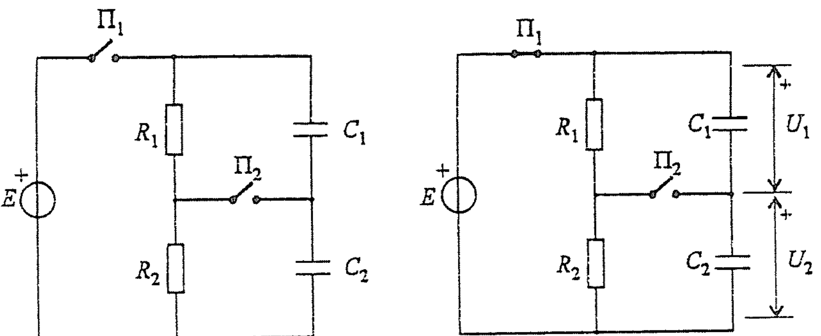
$$Q(I) = CU_{10}(I) = -\frac{CRI}{3} . \quad (157.2)$$

Konačno, pošto je $q = \Delta Q$, dobijamo $I = -3q/(CR) = -30$ mA.

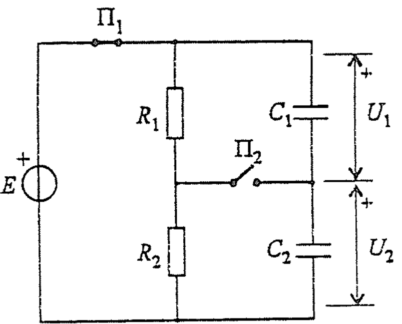
158. U kolu sa slike 158.1 je $E = 20$ V, $R_1 = 12\ \Omega$, $R_2 = 8\ \Omega$ i $C_1 = C_2 = 10\ \mu$F. Prekidači Π_1 i Π_2 su otvoreni, a kondenzatori neopterećeni. Prvo se zatvori prekidač Π_1 i uspostavi stacionarno stanje. Potom se zatvori i prekidač Π_2. Koliki su priraštaji energija kondenzatora od trenutka zatvaranja prekidača Π_2 do uspostavljanja novog stacionarnog stanja? (*P961004*)



Slika 157.3.



Slika 158.1.



Slika 158.2.

REŠENJE:
Pošto su kondenzatori prethodno bili neopterećeni, u stacionarnom stanju nakon zatvaranja samo prekidača Π_1 je (slika 158.2)

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} = 1 \qquad (158.1)$$

(kapacitivni razdelnik napona). Stoga je $U_1 = U_2 = E/2 = 10$ V. Energije kondenzatora su $W_{e1} = W_{e2} = 0,5$ mJ.

U stacionarnom stanju uspostavljenom nakon što se zatvori i prekidač Π_2, naponi kondenzatora su određeni otporničkim razdelnikom napona,

$$U_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E = 12 \text{ V}, \qquad U_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 8 \text{ V}, \qquad (158.2)$$

odakle je $W_{e1}' = 0,72$ mJ i $W_{e2}' = 0,32$ mJ.

Priraštaji energija kondenzatora su $\Delta W_{e1} = 0,22$ mJ i $\Delta W_{e2} = -0,18$ mJ.

159. Četiri neopterećena kondenzatora vezana su u kolo prikazano na slici 159.1. Poznato je: $E = 200$ V, $R_1 = 1$ MΩ, $R_2 = 400$ kΩ, $R_3 = 600$ kΩ, $C_1 = 6\ \mu$F, $C_2 = 4\ \mu$F i $C_3 = C_4 = 5\ \mu$F. Izračunati napon U_{12}. (*P900928*)

REZULTAT:
Napon je $U_{12} = 10$ V.

160. Tri neopterećena kondenzatora, kapacitivnosti $C_1 = 3\ \mu$F, $C_2 = 2\ \mu$F i $C_3 = 1\ \mu$F, vezana su u kolo sa naponskim generatorom elektromotorne sile $E = 2$ V, kao što je prikazano na slici 160.1. Izračunati opterećenosti sva tri kondenzatora. (*P930624*)

REŠENJE:
Usvojimo referentne smerove za opterećenosti kondenzatora kao na slici 160.2. Pošto su kondenzatori pre vezivanja u kolo bili neopterećeni, prema zakonu o održanju količine elektriciteta, primenjenom na čvor 1, tj. na domen koji obuhvata samo gornje elektrode kondenzatora, imamo

$$-Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0 . \qquad (160.1)$$

Jednačine po drugom Kirhofovom zakonu za elektrostatičke mreže,

$$\sum_S \left(E, -\frac{Q}{C}\right) = 0 , \qquad (160.2)$$

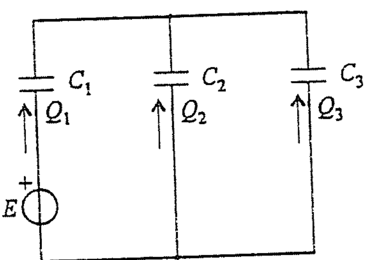
za nezavisne puteve S_1 i S_2 glase

$$E - \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = 0 , \qquad (160.3)$$

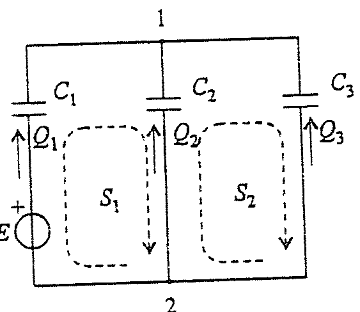
Slika 159.1.

$$-\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = 0 . \qquad (160.4)$$

Rešenje sistema jednačina (160.1), (160.3) i (160.4) je: $Q_1 = 3\ \mu$C, $Q_2 = -2\ \mu$C i $Q_3 = -1\ \mu$C.

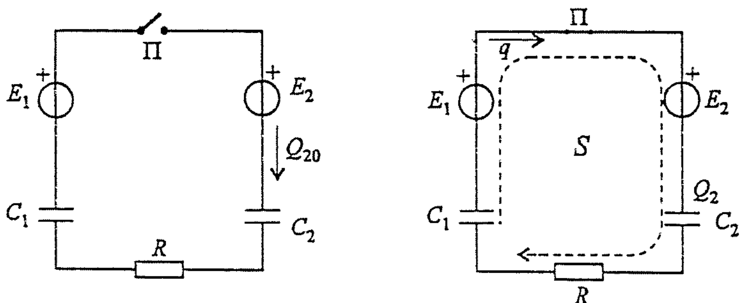


Slike 160.1.



Slika 160.2.

161. U kolu prikazanom na slici 161.1 je $E_1 = 5$ V, $E_2 = 12$ V, $C_1 = 1\ \mu$F i $C_2 = 2\ \mu$F. Pri otvorenom prekidaču Π kondenzator kapacitivnosti C_1 je neopterećen, a opterećenost kondenzatora kapacitivnosti C_2 je $Q_{20} = 10\ \mu$C. Koliki se električni rad pretvori u toplotu od trenutka zatvaranja prekidača Π do uspostavljanja stacionarnog stanja? (*P970221*)



Slika 161.1. Slika 161.2.

REŠENJE:
Električna energija u kondenzatorima pre zatvaranja prekidača je

$$W_{e0} = \frac{Q_{20}^2}{2C_2} = 25\ \mu\text{J}\ . \tag{161.1}$$

Označimo sa Q_1 i Q_2 opterećenosti kondenzatora u stacionarnom stanju uspostavljenom nakon zatvaranja prekidača (slika 161.2). Po drugom Kirhofovom zakonu je

$$-\frac{Q_1}{C_1} + E_1 - E_2 - \frac{Q_2}{C_2} = 0\ . \tag{161.2}$$

Kako je $Q_1 = q$ i $Q_2 = Q_{20} + q$, za protok elektriciteta dobijamo

$$q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(E_1 - E_2 - \frac{Q_{20}}{C_2}\right) = -8\ \mu\text{C}\ . \tag{161.3}$$

Sada je $Q_1 = -8\ \mu\text{C}$ i $Q_2 = 2\ \mu\text{C}$, a energija sadržana u kondenzatorima iznosi

$$W_e = \frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} = 33\ \mu\text{J}\ . \tag{161.4}$$

Na osnovu zakona održanja energije (rada) je

$$A_g = \Delta W_e + A_J\ , \tag{161.5}$$

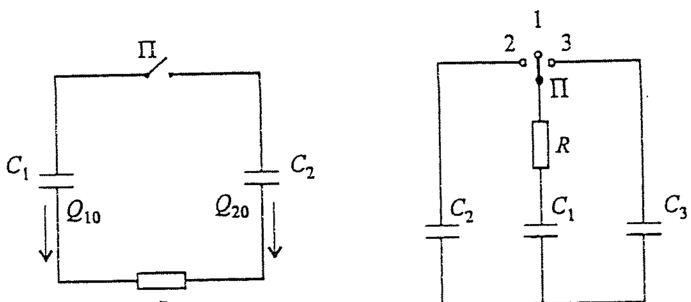
gde su A_g, ΔW_e i A_J rad generatora u kolu, priraštaj energije kondenzatora i električni rad pretvoren u toplotu, respektivno, u toku prelaznog režima. Kako je

$$A_g = E_1 q - E_2 q = 56\ \mu\text{J}\ , \tag{161.6}$$

to dobijamo $A_J = 48\ \mu\text{J}$.

162. Dva kondenzatora, kapacitivnosti $C_1 = 1\ \mu\text{F}$ i $C_2 = 2\ \mu\text{F}$, opterećena su sa $Q_{10} = Q_{20} = 3$ mC u odnosu na referentne smerove prikazane na slici 162.1, a prekidač Π je otvoren. Izračunati električni rad pretvoren u toplotu u otporniku otpornosti $R = 1\ \text{k}\Omega$ po zatvaranju prekidača Π. (*P950304*)

REZULTAT:
Traženi rad je $A_J = 750$ mJ.



Slika 162.1. Slika 163.1.

163. Tri kondenzatora, kapacitivnosti $C_1 = C_2 = C_3 = 10\ \mu\text{F}$, otpornik otpornosti $R = 1\ \text{k}\Omega$ i preklopnik Π vezani su kao na slici 163.1. U prvom stacionarnom stanju preklopnik je u položaju 1, energija prvog kondenzatora je $W_{e1} = 200$ mJ, a druga dva kondenzatora su neopterećena. Potom se preklopnik prebaci u položaj 2. Po uspostavljanju drugog stacionarnog stanja, preklopnik se prebaci u položaj 3. Kolika je ukupna energija pretvorena u toplotu od prvog stacionarnog stanja do uspostavljanja trećeg stacionarnog stanja? (*P950404*)

REŠENJE:
Označimo sa Q_0 opterećenost prvog kondenzatora kada je preklopnik u položaju 1. Kada se preklopnik prebaci u položaj 2 i uspostavi stacionarno stanje, opterećenosti prvog i drugog kondenzatora su po $Q_0/2$, a električna energija svakog od njih je $W_{e1}/4$. Ukupna električna energija sadržana u kolu je $W_{e1}/2$, a toliko iznosi i energija (rad) pretvorena u toplotu tokom prelaznog režima.

Kada se preklopnik zatim prebaci u položaj 3 i uspostavi novo stacionarno stanje, opterećenosti prvog i trećeg kondenzatora su po $Q_0/4$, električna energija svakog od ta dva kondenzatora je $W_{e1}/16$, a njihova ukupna energija $W_{e1}/8$. Kako je energija drugog kondenzatora i dalje $W_{e1}/4$, to je tokom drugog prelaznog režima u toplotu pretvorena energija $W_{e1}/8$.

Tokom oba prelazna režima u toplotu je pretvorena energija $5W_{e1}/8 = 125$ mJ.

164. Izračunati ekvivalentnu kapacitivnost mreže prikazane na slici 164.1, ako je $C_1 = 5$ nF, $C_2 = 10$ nF, $C_3 = 15$ nF, $C_4 = 20$ nF i $C_5 = 40$ nF. (*P890304*)

REŠENJE:
Transfigurišimo zvezdu kondenzatora kapacitivnosti C_1, C_2 i C_3 u trougao. Prema slici 164.2, kapacitivnosti kondenzatora trougla su

$$C_6 = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2+C_3} = \frac{5}{3}\,\mathrm{nF}\,, \quad C_7 = \frac{C_1C_3}{C_1+C_2+C_3} = 2,5\,\mathrm{nF}\,,$$

$$C_8 = \frac{C_2C_3}{C_1+C_2+C_3} = 5\,\mathrm{nF}\,. \tag{164.1}$$

Sada je ekvivalentna kapacitivnost mreže

$$C_e = \frac{(C_4+C_7)(C_5+C_8)}{C_4+C_5+C_7+C_8} + C_6 = 16,7\,\mathrm{nF}\,. \tag{164.2}$$

Slika 164.1.

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, vodeći računa o zadatim brojnim vrednostima kapacitivnosti kondenzatora. Naime, prema slici 164.3 je

$$C_e = \frac{q}{E_{test}}\,, \tag{164.3}$$

gde je E_{test} elektromotorna sila priključenog test generatora, a q protok kroz kolo generatora (nakon zatvaranja prekidača Π). Kako, međutim, data kapacitivna mreža predstavlja most koji je u ravnoteži, tj.

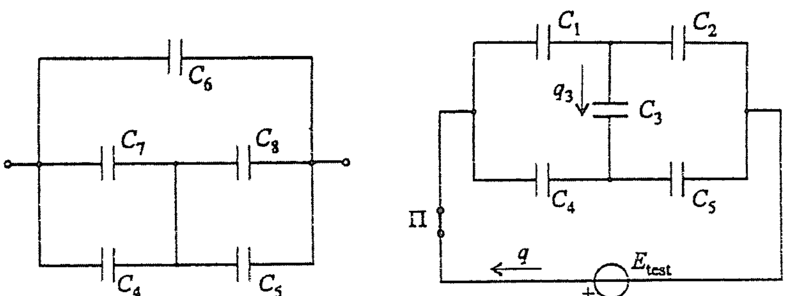
$$C_1C_5 = C_2C_4\,, \tag{164.4}$$

protok kroz granu sa kondenzatorom kapacitivnosti C_3 i napon na tome kondenzatoru su, po analogiji sa odgovarajućom mrežom sa otpornicima (videti zadatak 129), jednaki nuli. Stoga se, po teoremi kompenzacije, grana sa kondenzatorom kapacitivnosti C_3 može zameniti otvorenom vezom ili kratkim spojem. U oba slučaja, dobijene rednoparalelne veze kondenzatora se jednostavno svode na jedan ekvivalentan kondenzator, kapacitivnosti $C_e = 16,7$ nF.

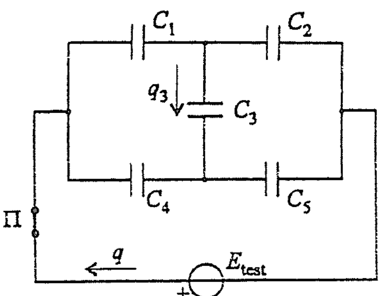
165. Zavisnost intenziteta struje I_2 od napona U_2 u kolu stalne struje sa slike 165.1, pri zatvorenom prekidaču Π, prikazana je na slici 165.2. Poznate su i otpornosti $R_2 = 100\ \Omega$ i $R_3 = 200\ \Omega$. Nacrtati grafik zavisnosti struje I_2 od napona U_2 pri otvorenom prekidaču Π. (*Z950908*)

REŠENJE:
Zadato kolo (sa zatvorenim prekidačem Π) se, u odnosu na desni par priključaka, može zameniti Tevenenovim generatorom (slika 165.3), za koji važi

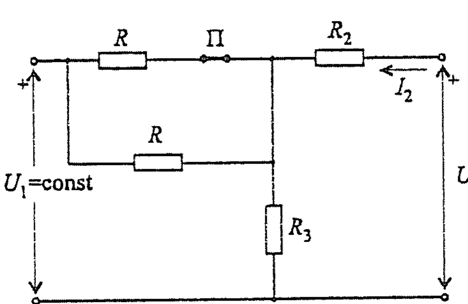
$$I_2 = \frac{1}{R_T}U_2 - \frac{E_T}{R_T}\,. \tag{165.1}$$



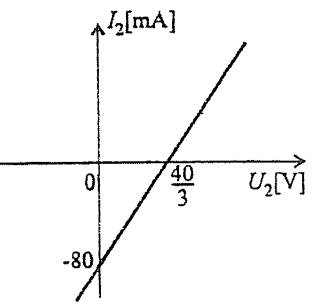
Slika 164.2.



Slika 164.3.



Slika 165.1.



Slika 165.2.

Na osnovu zadatog dijagrama dobijamo $E_T = 40/3$ V i $R_T = 500/3\ \Omega$. Sa druge strane je

$$E_T = \frac{R_3}{R_3+\frac{R}{2}}U_1\,, \qquad R_T = R_2 + R_3 \parallel \frac{R}{2}\,, \tag{165.2}$$

odakle je $R = 200\ \Omega$ i $U_1 = 20$ V.

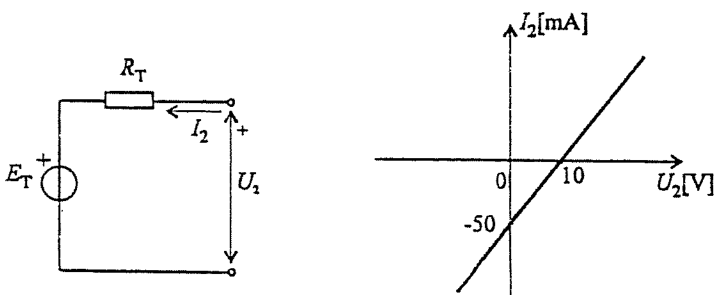
Kada je prekidač Π otvoren, imamo

$$I_2 = \frac{1}{R_T'}U_2 - \frac{E_T'}{R_T'}\,, \tag{165.3}$$

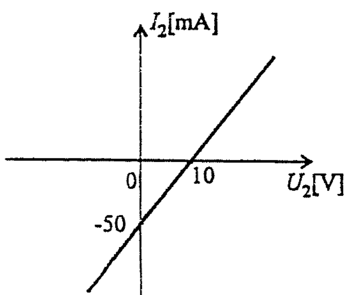
pri čemu je

$$E_T' = \frac{R_3}{R_3+R}U_1 = 10\ \mathrm{V}\,, \qquad R_T' = R_2 + R_3 \parallel R = 200\ \Omega\,. \tag{165.4}$$

Relacija (165.3) se može grafički prikazati kao na slici 165.4.

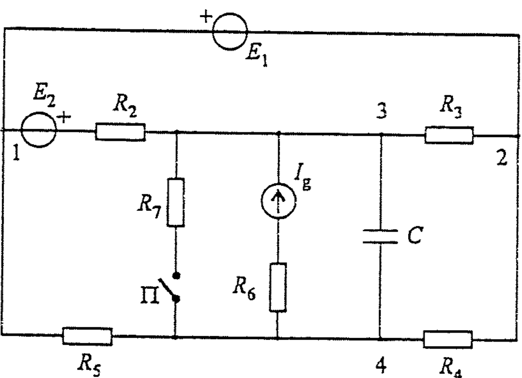


Slika 165.3.



Slika 165.4.

166. U kolu prikazanom na slici 166.1 poznato je: $E_1 = E_2 = 10$ V, $I_g = 40$ mA, $R_2 = R_3 = 500\ \Omega$, $R_4 = R_5 = 1$ kΩ, $R_6 = 250\ \Omega$ i $C = 2\ \mu$F, a prekidač Π je otvoren. Od trenutka zatvaranja prekidača Π do uspostavljanja novog stacionarnog stanja u kolu, kroz granu sa kondenzatorom protekne $q_{34} = -35\ \mu$C. Izračunati otpornost R_7. (*Z960204*)



Slika 166.1.

Slika 166.2.

REŠENJE:
U odnosu na granu sa otpornikom otpornosti R_7 i prekidačem Π ostatak kola zamenjujemo ekvivalentnim Tevenenovim generatorom (slika 166.2). Primenjujući teoremu superpozicije, za elektromotornu silu Tevenenovog generatora imamo

$$E_{\rm T} = (U_{34})_{\rm ph} = \left(-\frac{R_4}{R_4+R_5} + \frac{R_3}{R_2+R_3}\right)E_1 + \frac{R_3}{R_2+R_3}E_2 + \left(\frac{R_4R_5}{R_4+R_5} + \frac{R_2R_3}{R_2+R_3}\right)I_g = 35\ \text{V}. \tag{166.1}$$

Unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora je

$$R_{\rm T} = R_{e34} = R_2 \parallel R_3 + R_4 \parallel R_5 = 750\ \Omega. \tag{166.2}$$

Kada je prekidač Π otvoren, napon kondenzatora jednak je elektromotornoj sili $E_{\rm T}$, a njegov priraštaj od jednog do drugog stacionarnog stanja jednak je q_{34}/C. Stoga napon kondenzatora pri zatvorenom prekidaču iznosi

$$U_{34} = E_{\rm T} + \frac{q_{34}}{C} = 17,5\ \text{V}. \tag{166.3}$$

Kako je i

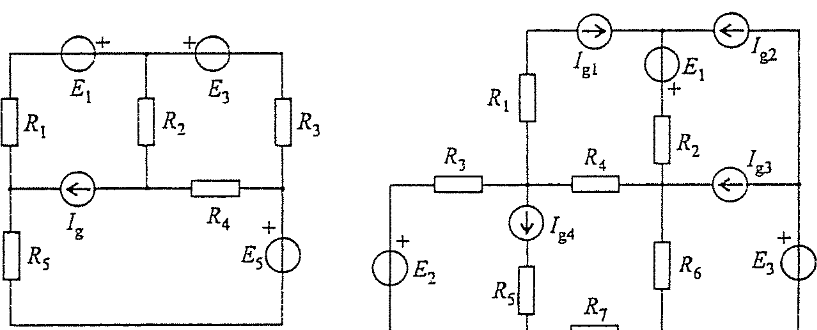
$$U_{34} = \frac{R_7}{R_{\rm T}+R_7}E_{\rm T}, \tag{166.4}$$

to za traženu otpornost dobijamo $R_7 = 750\ \Omega$.

167. U kolu prikazanom na slici 167.1 poznato je: $E_1 = 100$ mV, $E_3 = 200$ mV, $E_5 = 400$ mV, $I_g = 2$ mA, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = R_5 = 100\ \Omega$ i $R_4 = 40\ \Omega$. Izračunati snagu koju razvija idealni strujni generator. (*Z920708*)

REZULTAT:
Snaga strujnog generatora je $P_{I_g} = -160\ \mu$W.

168. U kolu prikazanom na slici 168.1 poznato je: $E_1 = 3$ V, $E_2 = 5$ V, $E_3 = 10$ V, $I_{g1} = 10$ mA, $I_{g2} = -5$ mA, $I_{g3} = 5$ mA, $I_{g4} = 6$ mA, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 250\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 100\ \Omega$, $R_5 = 25\ \Omega$ i $R_6 = R_7 = 50\ \Omega$. Izračunati snagu otpornika otpornosti R_4 i snagu idealnog strujnog generatora jačine struje I_{g1}. (*Z920125*)

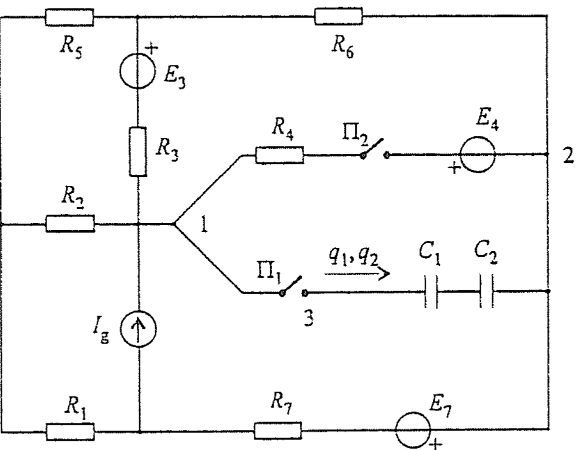


Slika 167.1.

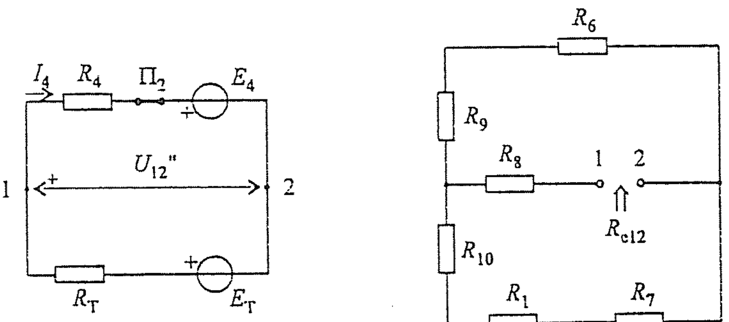
Slika 168.1.

REZULTAT:
Tražene snage su $P_{R_4} = 6,4$ mW i $P_{I_{g1}} = -5,5$ mW.

169. Za kolo stalne struje sa slike 169.1 je poznato: $E_3 = 4$ V, $R_1 = R_6 = 100\ \Omega$, $R_2 = 350\ \Omega$, $R_3 = 700\ \Omega$, $R_5 = 175\ \Omega$, $R_7 = 50\ \Omega$ i $C_1 = C_2 = 1\ \mu F$. Pri otvorenim prekidačima Π_1 i Π_2 prvi kondenzator je neopterećen, a poznat je napon $U_{32} = -1$ V. Prvo se zatvori samo prekidač Π_1, pri čemu kroz granu sa kondenzatorima protekne količina elektriciteta $q_1 = 3\ \mu C$. Zatim se zatvori i prekidač Π_2 i ustanovi novi protok $q_2 = -7,5\ \mu C$. Odrediti snagu koju prima grana sa idealnim naponskim generatorom elektromotorne sile E_4 i otpornikom otpornosti R_4 posle zatvaranja prekidača Π_2. (*Z940902*)



Slika 169.1.



Slika 169.2.

Slika 169.3.

REŠENJE:
U prvom stacionarnom stanju, kada su oba prekidača otvorena, opterećenost drugog kondenzatora je

$$Q_{20} = C_2 U_{32} = -1\ \mu C\ , \tag{169.1}$$

jer je prvi kondenzator neopterećen.

U stacionarnom stanju uspostavljenom nakon zatvaranja samo prekidača Π_1, napon redne veze kondenzatora je

$$U'_{12} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{Q_{20} + q_1}{C_2} = 5\ \text{V}\ . \tag{169.2}$$

Konačno, u trećem stacionarnom stanju (oba prekidača zatvorena), imamo

$$U''_{12} = U'_{12} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) q_2 = -10\ \text{V}\ . \tag{169.3}$$

U odnosu na granu sa prekidačem Π_2 ostatak kola se može zameniti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, kao na slici 169.2. Pri tome je $E_T = (U_{12})_{ph} = U'_{12}$. Prilikom određivanja otpornosti R_T, pogodno je trougao koji čine otpornici otpornosti R_2, R_3 i R_5 transfigurisati u zvezdu otpornika otpornosti $R_8 = 200\ \Omega$, $R_9 = 100\ \Omega$ i $R_{10} = 50\ \Omega$ (slika 169.3), pa je

$$R_T = R_{e12} = R_8 + (R_1 + R_7 + R_{10}) \parallel (R_6 + R_9) = 300\ \Omega\ . \tag{169.4}$$

Sa slike 169.2 je

$$I_4 = \frac{-U''_{12} + E_T}{R_T} = 50\ \text{mA}\ , \tag{169.5}$$

pa snaga koju prima grana sa idealnim naponskim generatorom elektromotorne sile E_4 i otpornikom otpornosti R_4 (kada je prekidač Π_2 zatvoren) iznosi

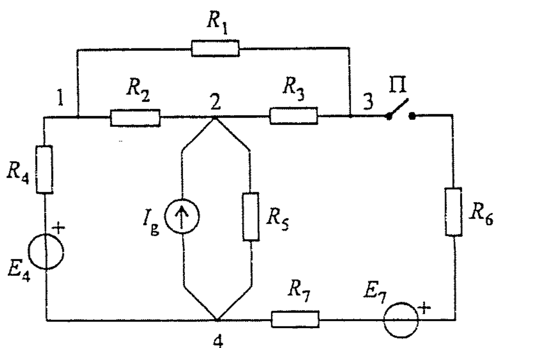
$$P_{12} = U''_{12} I_4 = -500\ \text{mW}\ . \tag{169.6}$$

170. U kolu prikazanom na slici 170.1 poznato je: $E_7 = 19$ V, $I_g = 5$ mA, $R_1 = R_6 = 2\ k\Omega$, $R_2 = 3\ k\Omega$, $R_3 = 5\ k\Omega$, $R_4 = 400\ \Omega$ i $R_5 = R_7 = 1,5\ k\Omega$. Kada je prekidač Π zatvoren, poznat je napon $U_{34} = 5$ V. Koliki je napon U'_{34} kada se prekidač Π otvori? (*Z910122*)

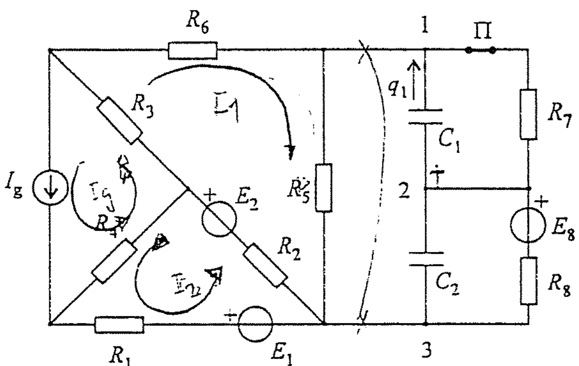
REZULTAT:
Po otvaranju prekidača je $U'_{34} = -2$ V.

171. Za kolo stalne struje sa slike 171.1 je poznato: $E_1 = 12$ V, $E_2 = 2$ V, $E_3 = 4$ V, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = R_5 = R_7 = 15\ \Omega$, $R_4 = R_6 = R_8 = 5\ \Omega$, $C_1 = 0,5\ \mu F$ i $C_2 = 1,2\ \mu F$. Po zatvaranju prekidača Π, kroz kondenzator kapacitivnosti C_1 protekne količina elektriciteta $q_1 = 1,25\ \mu C$. Odrediti (a) struju strujnog generatora I_g i (2) opterećenosti kondenzatora kapacitivnosti C_2 pre i posle zatvaranja prekidača Π. (*Z940620*)

REŠENJE:
(a) Deo kola levo od kondenzatora zamenjujemo ekvivalentnim Tevenenovim generatorom, kao što je prikazano na slici 171.2. U cilju određivanja elektromotorne sile



Slika 170.1.



Slika 171.1.

E_T, primenjujemo metodu konturnih struja. Za sistem nezavisnih kontura sa slike 171.3, imamo

$$(R_2 + R_3 + R_6 + R_5)I_I + R_2 I_{II} + R_3 I_g = E_2\,, \qquad (171.1)$$

$$R_2 I_I + (R_1 + R_2 + R_4)I_{II} - R_4 I_g = -E_1 + E_2\,, \qquad (171.2)$$

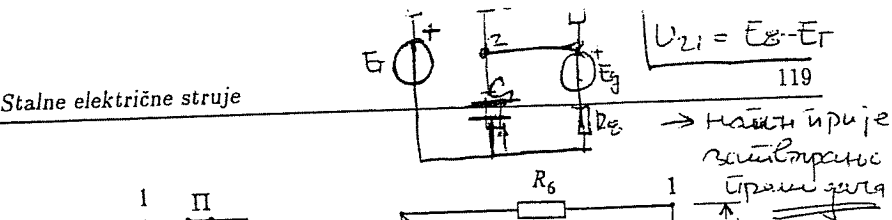
odakle je za zadate brojne vrednosti

$$E_T = (U_{13})_{ph} = R_5 I_I = \frac{26}{9} - \frac{55}{9} I_g \qquad (171.3)$$

(E_T u V, I_g u A).

Unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora iznosi

$$R_T = R_{e13} = R_5 \,\|\, [R_6 + R_3 + R_2 \,\|\, (R_4 + R_1)] = 10\,\Omega\,. \qquad (171.4)$$



Slika 171.2.

Slika 171.3.

Sa slike 171.2 je

$$q_1 = C_1 \Delta U_{21} = C_1 \left(-R_7 \frac{E_T - E_8}{R_T + R_7 + R_8} + E_T - E_8 \right)\,, \qquad (171.5)$$

odakle je $E_T = 9$ V. Sada je iz (171.3) $I_g = -1$ A.

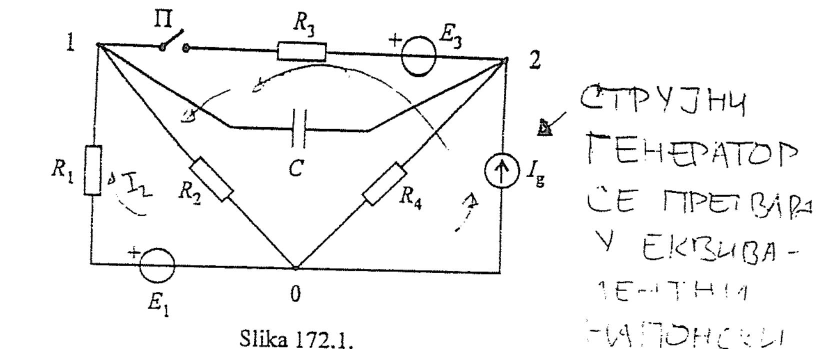
(b) Opterećenosti kondenzatora kapacitivnosti C_2 pre i posle zatvaranja prekidača Π su, redom,

$$Q_{20} = -C_2 E_8 = -4{,}8\,\mu\text{C}\,, \qquad Q_2 = -C_2 \left(R_8 \frac{E_T - E_8}{R_T + R_7 + R_8} + E_8 \right) = -5{,}8\,\mu\text{C}\,. \qquad (171.6)$$

172. Za kolo stalne struje sa slike 172.1 je poznato: $E_1 = 50$ V, $E_3 = 30$ V, $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 500\,\Omega$, $R_3 = 3$ kΩ, $R_4 = 10$ kΩ i $C = 0{,}7\,\mu$F. Po zatvaranju prekidača Π kroz granu sa kondenzatorom protekne $q_{12} = 0{,}213$ mC. Odrediti struju strujnog generatora I_g. (*Z940121*)

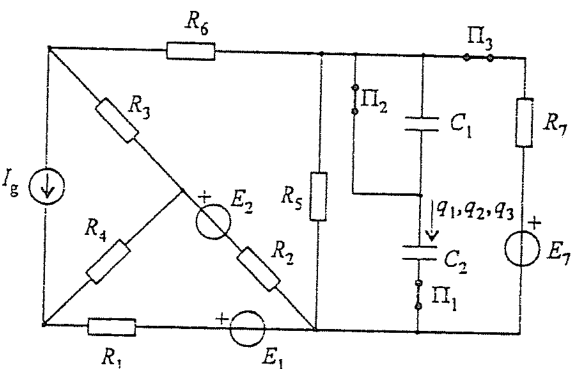
REZULTAT:
Struja strujnog generatora je $I_g = 40$ mA.

173. Za kolo stalne struje sa slike 173.1 je $E_1 = 8$ V, $E_7 = 12$ V, $R_1 = R_7 = 10\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = R_5 = 15\,\Omega$, $R_4 = R_6 = 5\,\Omega$, $C_1 = 0{,}5\,\mu$F, $C_2 = 1\,\mu$F i sva tri prekidača su otvorena. Po zatvaranju samo prekidača Π_1, kroz kondenzator kapacitivnosti C_2 protekne količina elektriciteta $q_1 = 2\,\mu$C. Zatim se zatvori i prekidač Π_2 i kroz isti kondenzator se ustanovi protok $q_2 = 3\,\mu$C. Kada se, potom, zatvori i prekidač Π_3, novi protok kroz kondenzator kapacitivnosti C_2 je $q_3 = 5\,\mu$C. Odrediti opterećenosti oba kondenzatora (Q_{10} i Q_{20}) u početnom stanju, kada su sva tri prekidača bila otvorena. (*Z960703*)



Slika 172.1.

СТРУЈНИ ГЕНЕРАТОР СЕ ПРЕТВАРА У ЕКВИВАЛЕНТНИ НАПОНСКИ



Slika 173.1.

REŠENJE:
Primenom Tevenenove teoreme, dato kolo možemo predstaviti kolom sa slike 173.2, pri čemu je $R_T = 10\ \Omega$. Za stacionarna stanja koja se uspostavljaju nakon zatvaranja prekidača Π_1, Π_2 i Π_3 imamo, redom, sledeće jednačine:

$$\frac{Q_{20}+q_1}{C_2} + \frac{Q_{10}+q_1}{C_1} = E_T\,, \tag{173.1}$$

$$\frac{Q_{20}+q_1+q_2}{C_2} = E_T\,, \tag{173.2}$$

$$\frac{Q_{20}+q_1+q_2+q_3}{C_2} = \frac{E_T R_7 + E_7 R_T}{R_T + R_7}\,. \tag{173.3}$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijamo $E_T = 2$ V, $Q_{10} = -0,5\ \mu$C i $Q_{20} = -3\ \mu$C.

174. Za kolo prikazano na slici 174.1 poznato je: $E_3 = 10$ V, $R_1 = R_5 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$ i $R_4 = 400\ \Omega$. Izračunati snagu koju razvija idealan naponski generator elektoromotorne sile E_3.

REŠENJE:
Na osnovu Tevenenove teoreme, zadato kolo svodimo na prosto kolo prikazano na slici 174.2. Potrebno je da odredimo parametre ekvivalentnog Tevenenovog generatora.

U cilju određivanja elektromotorne sile E_T, posmatramo kolo sa slike 174.3. To kolo se, međutim, primenom teoreme strujne kompenzacije svodi na kolo prikazano na slici 174.4, pri čemu je $I_k = I$. Sada je

$$E_T = (U_{12})_{ph} =$$

$$\frac{R_1 R_5 - R_2 R_4}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5} I_k = 0\,, \tag{174.1}$$

jer otpornosti R_1, R_2, R_4 i R_5 zadovoljavaju uslov za ravnotežu mosta (129.1).

Unutrašnja otpornost Tevenenovog generatora iznosi $R_T = R_{e12} = 200\ \Omega$ [videti (129.2)].

Slika 173.2.

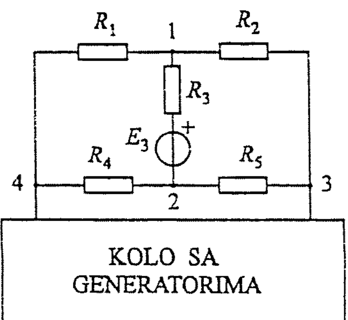
Prema tome, uravnoteženi most u čiju je jednu dijagonalu priključeno proizvoljno kolo sa jednim parom krajeva koje sadrži generatore može se u odnosu na kolo priključeno u drugu dijagonalu mosta zameniti Tevenenovim generatorom nulte elektromotorne sile i unutrašnje otpornosti jednake ekvivalentnoj otpornosti mosta.

Konačno, sa slike 174.2 je $I_3 = E_3/(R_3 + R_T) = 20$ mA, pa je tražena snaga idealnog naponskog generatora $P_{E_3} = E_3 I_3 = 200$ mW.

175. Za kolo stalne struje sa slike 175.1 je poznato: $E_6 = -15$ V, $R_1 = R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 50\ \Omega$, $R_6 = 25\ \Omega$, $C_1 = 0,5\ \mu$F i $C_2 = 1\ \mu$F. Pri otvorenom prekidaču Π napon drugog kondenzatora je $U_{32} = 15$ V. Po zatvaranju prekidača, kroz granu sa kondenzatorima protekne $q = -2,5\ \mu$C. Odrediti (a) opterećenost Q_{10} prvog kondenzatora pri otvorenom prekidaču i (b) elektromotornu silu E_1. (*Z940405*)

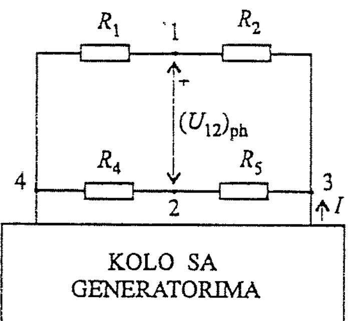
REZULTAT:
Tražene veličine su: (a) $Q_{10} = 20\ \mu$C i (b) $E_1 = 100$ V.

176. Za kolo stalne struje sa slike 176.1 je poznato: $E_2 = 10$ V, $I_g = 40$ mA, $R_2 = R_3 = 500\ \Omega$, $R_4 = R_5 = 1$ kΩ i $R_6 = 250\ \Omega$, a prekidač Π je zatvoren.

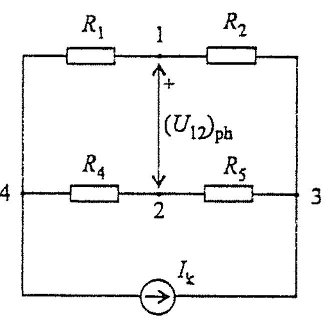


Slika 174.1.

Slika 174.2.



Slika 174.3.



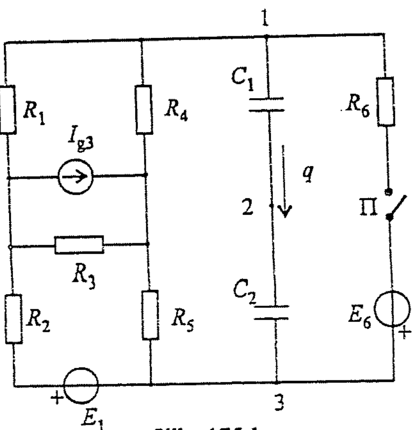
Slika 174.4.

Posle otvaranja prekidača Π ustanovi se priraštaj snage koju razvija idealni strujni generator $\Delta P_{I_g} = 0,7$ W. Izračunati otpornost R_7. (*Z940126*)

REZULTAT:
Otpornost je $R_7 = 750\ \Omega$.

177. U kolu prikazanom na slici 177.1 poznato je $E_1 = 20$ V, $E_2 = 16$ V, $I_g = 1$ A, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$, $R_4 = R_6 = R_9 = 7\ \Omega$, $R_5 = 4\ \Omega$, $R_8 = 10\ \Omega$ i $C = 32\ \mu$F. Prekidač Π je otvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. Prekidač Π se zatim zatvori. Po uspostavljanju stacionarnog stanja, priraštaj energije kondenzatora u odnosu na prethodno stacionarno stanje je $\Delta W_e = -3,825$ mJ. Odrediti otpornost R_7. (*Z891014*)

REŠENJE:
Pogodno je najpre deo kola bez otpornika otpornosti R_4, R_7, R_8 i R_9, kondenzatora



Slika 175.1.

Slika 176.1.

i idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E_1, prikazan na slici 177.2, zameniti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom. U tome cilju, trougao R_1–R_2–R_3 transfigurišemo u ekvivalentnu zvezdu otpornika, otpornosti $R_{10} = 3\ \Omega$, $R_{11} = 18\ \Omega$ i $R_{12} = 6\ \Omega$, a paralelnu vezu idealnog strujnog generatora i realnog naponskog generatora zamenjujemo ekvivalentnim realnim naponskim generatorom, elektromotorne sile $E_3 = 20$ V i unutrašnje otpornosti R_5. Tako dobijamo kolo prikazano na slici 177.3, na osnovu kojeg za elektromotornu silu i otpornost Tevenenovog generatora dobijamo $E_T = (U_{12})_{ph} = 10$ V i $R_T = R_{e12} = 23\ \Omega$, respektivno.

Kada je prekidač Π otvoren, ekvivalentna šema kola je prikazana na slici 177.4. Napon kondenzatora je

$$U_{14} = U_{12} = E_T + R_T \frac{E_1 - E_T}{R_8 + R_4 + R_T} = 15,75\ \text{V}, \tag{177.1}$$

a njegova električna energija

$$W_e = \frac{1}{2} C U_{14}^2 = 3,969\ \text{mJ}. \tag{177.2}$$

Kada je prekidač Π zatvoren, dobija se kolo prikazano na slici 177.5. Na osnovu Kirhofovih zakona, imamo

$$E_T + (R_T + R_4)I_4' + R_8(I_4' + I_7') - E_1 = 0, \tag{177.3}$$

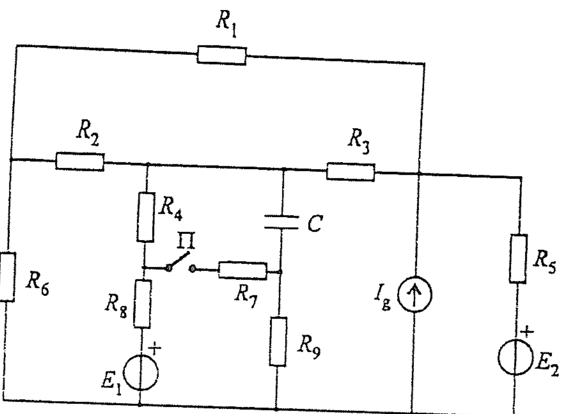
$$E_1 - R_8(I_4' + I_7') - (R_7 + R_9)I_7' = 0. \tag{177.4}$$

Napon kondenzatora je

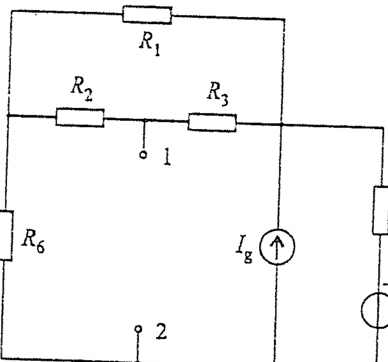
$$U_{14}' = -R_9 I_7' + E_T + R_T I_4', \tag{177.5}$$

a istovremeno, prema uslovima zadatka,

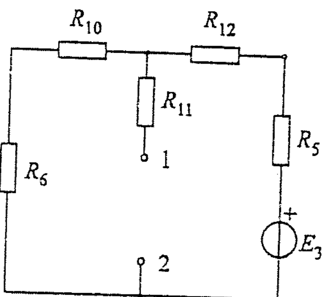
$$U_{14}' = \pm\sqrt{\frac{2\,(W_e + \Delta W_e)}{C}} = \pm 3\ \text{V}. \tag{177.6}$$



Slika 177.1.



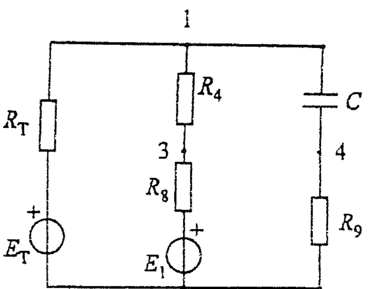
Slika 177.2.



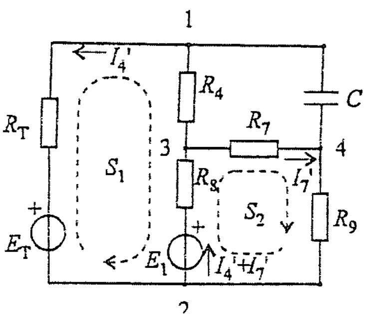
Slika 177.3.

Za $U'_{14} = 3$ V, rešavanjem jednačina (177.3) i (177.5) dobijamo $I'_4 = 0$ i $I'_7 = 1$ A, pa je iz jednačine (177.4) $R_7 = 3\ \Omega$. To predstavlja jedino rešenje, jer negativnoj brojnoj vrednosti napona U'_{14} odgovara $R_7 < 0$, što nema fizičkog smisla.

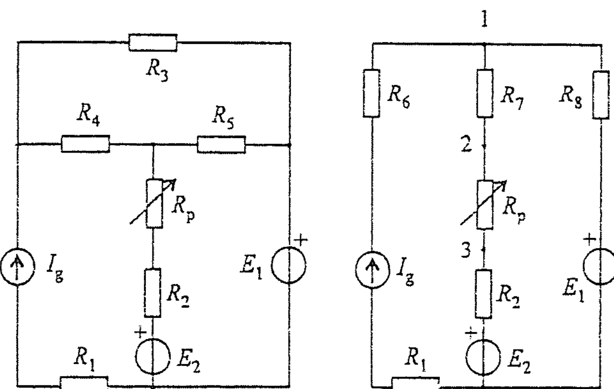
178. Za kolo stalne struje prikazano na slici 178.1 poznato je: $E_2 = 40$ V, $I_g = 0,3$ A, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 210\ \Omega$, $R_4 = 420\ \Omega$ i $R_5 = 105\ \Omega$. Otpornost promenljivog otpornika se može menjati u granicama $0 \leq R_p \leq 100\ \Omega$, a njegova maksimalna dopustiva struja je $(I_p)_{max} = 0,2$ A. Odrediti (a) pri kolikoj elektromotornoj sili E_1 će struja promenljivog otpornika biti nula u čitavom opsegu njegove otpornosti i (b) opseg elektromotorne sile E_1 pod uslovom da ne dođe do pregorevanja promenljivog otpornika ni za jednu otpornost R_p u zadatom opsegu. (*Z960920*)



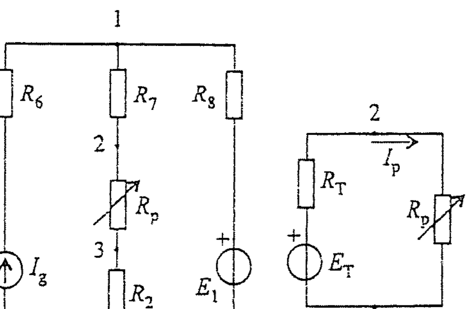
Slika 177.4.



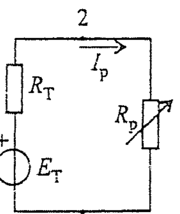
Slika 177.5.



Slika 178.1.



Slika 178.2.



Slika 178.3.

REŠENJE:
(a) Pogodno je trougao otpornika otpornosti R_3, R_4 i R_5 transfigurisati u zvezdu otpornika otpornosti $R_6 = 120\ \Omega$, $R_7 = 60\ \Omega$ i $R_8 = 30\ \Omega$ (slika 178.2), pa kolo, na osnovu Tevenenove teoreme, predstaviti kao na slici 178.3. Elektromotorna sila Tevenenovog generatora je data sa

$$E_T = -E_2 + E_1 + R_8 I_g = E_1 - 31\ , \qquad (178.1)$$

a unutrašnja otpornost iznosi $R_T = R_7 + R_8 + R_2 = 130\ \Omega$. Jačina struje promenljivog otpornika je

$$I_p = \frac{E_T}{R_p + R_T} = \frac{E_1 - 31}{R_p + 130} \qquad (178.2)$$

U gornjim relacijama, elektromotorne sile su date u V, jačine struja u A, a otpornosti u Ω. Za $E_1 = 31$ V, $I_p = 0$.

(b) Promenljivi otpornik neće pregoreti ako je zadovoljeno

$$|I_p| \le (I_p)_{max} . \tag{178.3}$$

Na osnovu (178.2) je

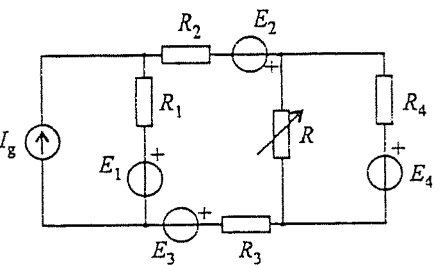
$$|E_1 - 31| \le 0,2(R_p + 130) , \tag{178.4}$$

ili, ekvivalentno,

$$(-0,2R_p + 5 \le E_1) \ \wedge \ (E_1 \le 0,2R_p + 57) . \tag{178.5}$$

Gornje dve relacije moraju biti zadovoljene za svako R_p iz opsega $[0, 100\ \Omega]$. Zamenom graničnih brojnih vrednosti, $R_p = 0$ i $R_p = 100\ \Omega$, svaka relacija se svodi na dva uslova za E_1, od kojih biramo onaj stroži. Tako dobijamo sledeći opseg za elektromotornu silu E_1:

$$5\ \text{V} \le E_1 \le 57\ \text{V} . \tag{178.6}$$



Slika 179.1.

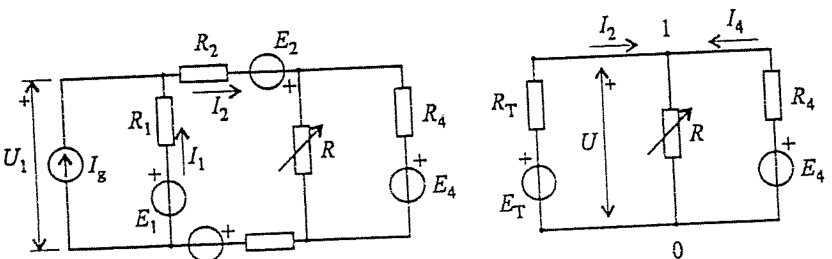
179. U kolu prikazanom na slici 179.1 je $E_1 = 1$ V, $I_g = 6$ mA, $R_1 = 1$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ, $R_3 = 3$ kΩ i $R_4 = 4$ kΩ. Kada je otpornost promenljivog otpornika $R = 0$, snaga idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E_1 je $P_{E_1} = -5$ mW. Kada je $R = 1,2$ kΩ, snaga idealnog strujnog generatora je $P_{I_g} = 37,6$ mW. Kolika je snaga idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E_4 kada je $R = 2,4$ kΩ? (*Z910618*)

REŠENJE:
Uočimo da su za dato kolo nepoznate tri elektromotorne sile (E_2, E_3 i E_4), a da su, na drugoj strani, poznata dva odziva u kolu. Ovaj broj poznatih podataka je, međutim, dovoljan da se zadatak reši, jer je, očigledno, od interesa samo razlika elektromotornih sila E_2 i E_3, tj. ekvivalentna elektromotorna sila $E_2 - E_3$, a ne svaka od njih pojedinačno.

Kada je $R = 0$, na osnovu poznate snage idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E_1 imamo

$$I_1' = \frac{P_{E_1}}{E_1} = -5\ \text{mA} , \tag{179.1}$$

pa je $I_2' = I_g + I_1' = 1$ mA, prema oznakama na slici 179.2. Paralelnu vezu otpornika nulte otpornosti i realnog naponskog generatora E_4–R_4 možemo zameniti kratkim



Slika 179.2.

Slika 179.3.

spojem, pa I_2' predstavlja struju kratkog spoja dela kola levo od promenljivog otpornika. Stoga taj deo kola možemo zameniti Nortonovim generatorom parametara

$$I_N = I_2' , \qquad R_N = R_1 + R_2 + R_3 = 6\ \text{k}\Omega , \tag{179.2}$$

odnosno Tevenenovim generatorom čije su elektromotorna sila i unutrašnja otpornost, redom,

$$E_T = R_N I_N = 6\ \text{V} , \qquad R_T = R_N . \tag{179.3}$$

Tako dobijamo kolo prikazano na slici 179.3. Jednostavno se pokazuje da je $E_2 - E_3 = -1$ V, ali taj podatak nije neophodan za rešavanje zadatka.

U slučaju kada je $R = 1,2$ kΩ, iz poznate snage idealnog strujnog generatora sledi

$$U_1'' = \frac{P_{I_g}}{I_g} = 6,27\ \text{V} , \tag{179.4}$$

pa imamo

$$I_1'' = \frac{-U_1'' + E_1}{R_1} = -5,27\ \text{mA} \tag{179.5}$$

i $I_2'' = 0,73$ A. Iz kola sa slike 179.3 dobijamo

$$U'' = E_T - R_T I_2'' = 1,6\ \text{V} , \tag{179.6}$$

odakle sledi $I'' = 1,33$ mA, $I_4'' = 0,6$ mA i treća nepoznata elektromotorna sila

$$E_4 = U'' + R_4 I_4'' = 4\ \text{V} . \tag{179.7}$$

U trećem slučaju, kada je $R = 2,4$ kΩ, jednačina po metodi potencijala čvorova za kolo sa slike 179.3 glasi

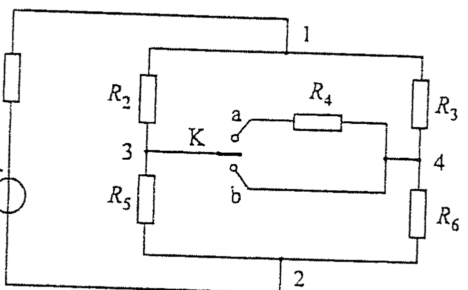
$$\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_4}\right) U''' = \frac{E_T}{R_T} + \frac{E_4}{R_4} , \tag{179.8}$$

odakle je $U''' = 2,4$ V i $I_4''' = 0,4$ mA, pa je

$$P_{E_4} = E_4 I_4''' = 1,6\ \text{mW} . \tag{179.9}$$

180. U kolu prikazanom na slici 180.1 poznato je: $R_1 = 4\ \text{k}\Omega$, $R_2 = R_5 = 2\ \text{k}\Omega$, $R_3 = 1\ \text{k}\Omega$ i $R_4 = 6\ \text{k}\Omega$. Kada je preklopnik K u položaju 'a', poznat je napon $U_{34} = 3$ V, a kada je u položaju 'b', poznata je jačina struje $I_{34} = 2$ mA. Izračunati elektromotornu silu E i otpornost R_6. (*Z920125*)

REZULTAT:
Tražene veličine su $E = -32$ V i $R_6 = 5\ \text{k}\Omega$.



Slika 180.1.

181. Za kolo stalne struje sa slike 181.1 poznato je: $E_1 = 10$ V, $R_1 = 180\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = 200\ \Omega$, $R_6 = R_7 = R_8 = 100\ \Omega$, $R_9 = 200\ \Omega$, $C_1 = 100$ nF i $C_2 = 200$ nF. Prekidač Π je otvoren. Posle zatvaranja prekidača Π količina elektriciteta proteklog kroz kondenzator kapacitivnosti C_1 iznosi $q_1 = 1,8\ \mu\text{C}$. Izračunati opterećenost Q_2 kondenzatora kapacitivnosti C_2 u stacionarnom stanju uspostavljenom posle zatvaranja prekidača Π. (*Z960404*)

REŠENJE.
Transfiguracijom dela kola koji čine otpornici otpornosti R_3, R_4, ..., R_9 dobijamo kolo prikazano na slici 181.2, gde je $R_{11} = R_{13} = 40\ \Omega$ i $R_{12} = 80\ \Omega$.

U stacionarnom stanju kada je prekidač Π otvoren, kondenzator kapacitivnosti C_1 je neopterećen (eventualno opterećeni kondenzator se isprazno kroz otpornik otpornosti R_1). Stoga, u stacionarnom stanju uspostavljenom nakon zatvaranja prekidača Π jačina struje kroz otpornik otpornosti R_1 iznosi

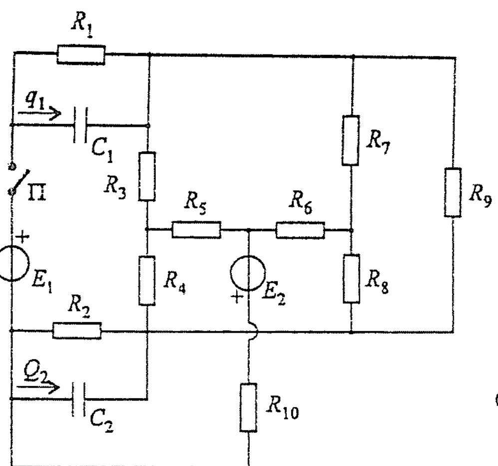
$$I_1 = \frac{q_1}{C_1 R_1} = 100\ \text{mA}\,. \tag{181.1}$$

Jednačina po drugom Kirhofovom zakonu za put S glasi

$$E_1 - (R_1 + R_{11})I_1 + (R_{13} + R_2)I_2 = 0\,, \tag{181.2}$$

odakle za jačinu struje kroz otpornik otpornosti R_2 dobijamo $I_2 = 120$ mA. Konačno, opterećenost kondenzatora kapacitivnosti C_2 u drugom stacionarnom stanju je

$$Q_2 = C_2 R_2 I_2 = 1,44\ \mu\text{C}\,. \tag{181.3}$$



Slika 181.1. Slika 181.2.

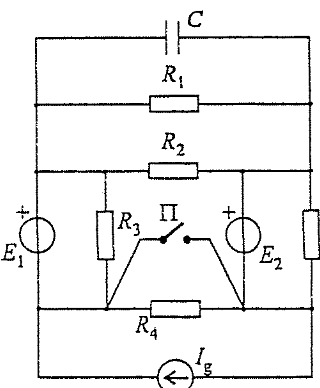
182. U kolu prikazanom na slici 182.1 poznato je: $E_1 = 10$ V, $E_2 = 20$ V, $I_g = 0,5$ A, $R_1 = 200\ \Omega$, $R_2 = 300\ \Omega$, $R_3 = 100\ \Omega$ i $C = 100\ \mu\text{F}$. Prekidač Π je najpre zatvoren i uspostavljeno je stacionarno stanje. Prekidač Π se zatim otvori, a po uspostavljanju novog stacionarnog stanja energija kondenzatora se poveća za $\Delta W_e = 11,2$ mJ u odnosu na prethodno stacionarno stanje. Izračunati otpornost R_4. (*Z920915*)

REZULTAT:
Otpornost je $R_4 = 80\ \Omega$.

183. Za kolo stalne struje sa slike 183.1 poznato je: $E_2 = 10$ V, $E_6 = 2$ V, $R_2 = 50\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$, $R_4 = 150\ \Omega$, $R_5 = 300\ \Omega$, $C_1 = 1\ \mu\text{F}$ i $C_2 = 0,5\ \mu\text{F}$. Prekidači Π_1 i Π_2 su otvoreni. Prvo se zatvori prekidač Π_1 i kroz kondenzator kapacitivnosti C_1 protekne količina elektriciteta $q = 4\ \mu\text{C}$. Zatim se zatvori i prekidač Π_2, pri čemu kroz kondenzator kapacitivnosti C_1 protekne količina elektriciteta $q_1 = -2,2\ \mu\text{C}$. Odrediti opterećenosti kondenzatora pri otvorenim prekidačima. (*Z950304*)

REŠENJE:
Posmatrajmo kolo u prvom stacionarnom stanju, kada su oba prekidača otvorena. Primenićemo drugi Kirhofov zakon za slučaj kada zatvoreni put sadrži idealne naponske generatore, otpornike i kondenzatore,

$$\sum_S (E_i - RI_i - \frac{Q}{C}) = 0\,. \tag{183.1}$$



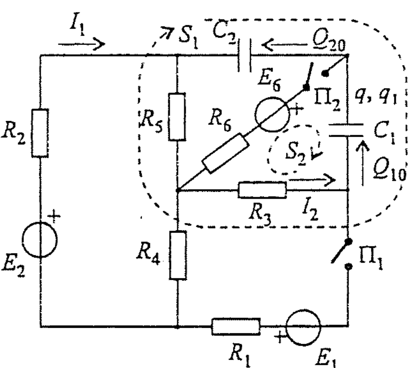
Slika 182.1.

Slika 183.1.

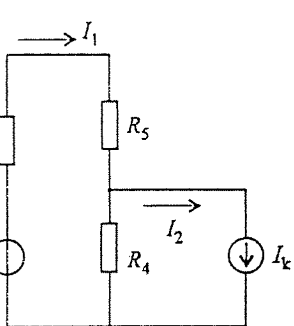
Za put S_1 prikazan na slici 183.2 imamo

$$\frac{Q_{20}}{C_2} + \frac{Q_{10}}{C_1} + R_5 \underbrace{\frac{E_2}{R_2 + R_5 + R_4}}_{I_1'} = 0 , \tag{183.2}$$

gde su Q_{10} i Q_{20} opterećenosti kondenzatora, a I_1' jačina struje kroz otpornik otpornosti R_5, u prvom stacionarnom stanju. U grani sa otpornikom otpornosti R_3 tada ne postoji struja.



Slika 183.2.



Slika 183.3.

Nakon zatvaranja samo prekidača Π_1, protok elektriciteta kroz oba kondenzatora je isti. U uspostavljenom stacionarnom stanju, jednačina po drugom Kirhofovom zakonu za isti put S_1 glasi

$$\frac{Q_{20} + q}{C_2} + \frac{Q_{10} + q}{C_1} + R_3 I_2 + R_5 I_1 = 0 , \tag{183.3}$$

gde su I_1 i I_2 jačine struje kroz otpornik otpornosti R_5 i kroz otpornik otpornosti R_3, respektivno, u tom stacionarnom stanju.

Konačno, u trećem stacionarnom stanju (oba prekidača zatvorena), jednačina po drugom Kirhofovom zakonu za put S_2, prikazan na slici 183.2, glasi

$$\frac{Q_{10} + q + q_1}{C_1} + R_3 I_2 + E_6 = 0 , \tag{183.4}$$

pri čemu je jačina struje kroz otpornik otpornosti R_3, I_2, ista kao u drugom stacionarnom stanju (u grani sa otpornikom R_6 ne postoji struja, kao i pre zatvaranja prekidača Π_2).

U gornjim jednačinama figurišu četiri nepoznate. To su tražene početne opterećenosti kondenzatora i jačine struja I_1 i I_2. Nedostaje još jedna jednačina, linearno nezavisna od ostalih. Očigledno, to mora biti veza između jačina struja I_1 i I_2 izražena preko parametara dela kola u kome postoje struje u drugom i trećem stacionarnom stanju. U tom delu kola nepoznata je elektromotorna sila E_1 i otpornost R_1. Granu sa ova dva elementa i otpornikom otpornosti R_3 možemo, međutim, zameniti kompenzacionim strujnim generatorom jačine struje $I_k = I_2$. Na taj način kolo se svodi na ono prikazano na slici 183.3. Transfiguracijom realnog strujnog generatora jačine struje I_k i unutrašnje otpornosti R_4 u ekvivalentan realan naponski generator, dobijamo prosto kolo, iz koga je

$$I_1 = \frac{E_2 + R_4 I_2}{R_2 + R_5 + R_4} . \tag{183.5}$$

Zamenom gornjeg izraza za I_1, kao i izraza za $(Q_{20}/C_2 + Q_{10}/C_1)$ iz jednačine (183.2), u jednačinu (183.3), dobijamo $I_2 = -80$ mA. Sada iz jednačine (183.4) sledi $Q_{10} = 1\ \mu$C. Konačno, iz jednačine (183.2) je $Q_{20} = -3,5\ \mu$C.

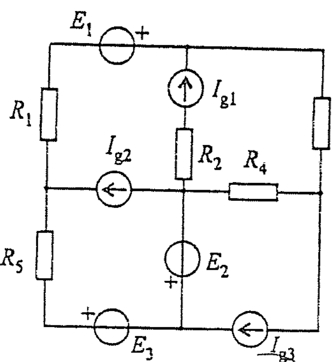
184. U kolu prikazanom na slici 184.1 poznato je: $E_1 = 100$ mV, $E_2 = 50$ mV, $E_3 = 250$ mV, $I_{g1} = 1$ mA, $I_{g2} = 2$ mA, $I_{g3} = 5$ mA, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$ i snaga prvog idealnog strujnog generatora $P_{I_{g1}} = 250\ \mu$W. Izračunati otpornost R_5. (*Z920825*)

REŠENJE:
Za sistem nezavisnih kontura prikazan na slici 184.2, jednačine po metodi konturnih struja glase

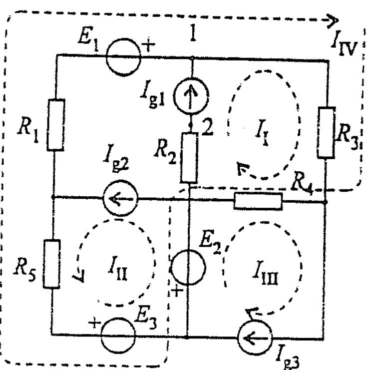
$$I_{\rm I} = I_{g1} , \tag{184.1}$$

$$I_{\rm II} = I_{g2} , \tag{184.2}$$

$$I_{\rm III} = I_{g3} , \tag{184.3}$$



Slika 184.1.



Slika 184.2.

$$(R_3 + R_4)I_I - R_5 I_{II} - R_4 I_{III} + (R_3 + R_4 + R_5 + R_1)I_{IV} = E_2 + E_3 + E_1 \ . \quad (184.4)$$

Napon prvog idealnog strujnog generatora je

$$U_{12} = \frac{P_{I_{g1}}}{I_{g1}} = 250 \text{ mV} , \quad (184.5)$$

a istovremeno

$$U_{12} = R_2 I_{g1} + R_4(I_I + I_{IV} - I_{III}) + R_3(I_I + I_{IV}) , \quad (184.6)$$

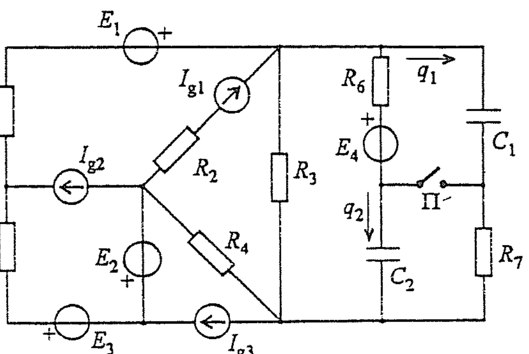
odakle, na osnovu jednačina (184.1)-(184.3), sledi $I_{IV} = 2,5$ mA.

Sada iz jednačina (184.1)-(184.4) dobijamo $R_5 = 250\ \Omega$.

185. U kolu stalne struje sa slike 185.1 poznato je: $E_1 = 100$ mV, $E_2 = 50$ mV, $E_3 = 250$ mV, $E_4 = 110$ mV, $I_{g1} = 1$ mA, $I_{g2} = 2$ mA, $I_{g3} = 5$ mA, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 60\ \Omega$, $R_4 = R_7 = 40\ \Omega$, $R_6 = 9\ \Omega$, $C_1 = 100$ nF i $C_2 = 200$ nF. Pri otvorenom prekidaču Π snaga prvog idealnog strujnog generatora je $P_{I_{g1}} = 250\ \mu$W. Izračunati protoke kroz kondenzatore, q_1 i q_2, od trenutka zatvaranja prekidača Π do uspostavljanja novog stacionarnog stanja. (*Z960302*)

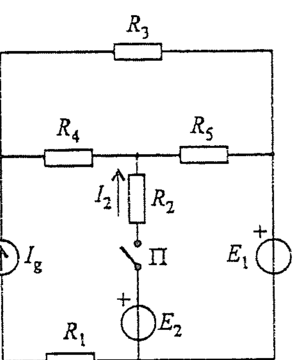
REZULTAT:
Protoci su $q_1 = -9,1$ nC i $q_2 = -12$ nC.

186. Za kolo stalne struje prikazano na slici 186.1 poznato je: $E_2 = 40$ V, $I_g = 0,3$ A, $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 140\ \Omega$, $R_3 = 210\ \Omega$, $R_4 = 420\ \Omega$ i $R_5 = 105\ \Omega$. Po zatvaranju prekidača Π, u drugoj grani se uspostavi struja jačine $I_2 = 0,1$ A. Odrediti priraštaje snaga koje razvijaju pojedini generatori u kolu usled zatvaranja prekidača Π. (*Z960302*)

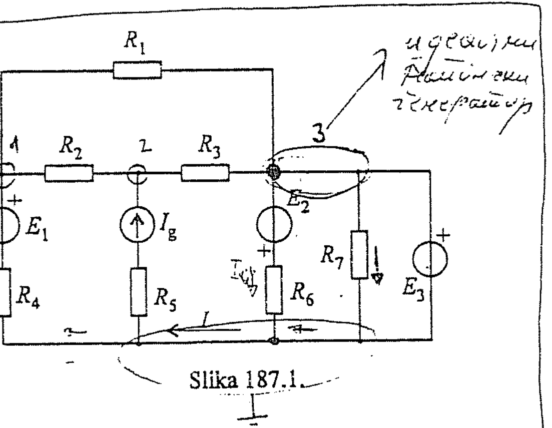


Slika 185.1.

REZULTAT:
Priraštaji snaga generatora su $\Delta P_{E_1} = -0,8$ W, $\Delta P_{E_2} = 4$ W i $\Delta P_{I_g} = 0,9$ W.



Slika 186.1.



Slika 187.1.

187. U kolu prikazanom na slici 187.1 poznato je: $E_1 = 10$ V, $E_2 = 20$ V, $E_3 = 30$ V, $I_g = 5$ mA, $R_1 = R_7 = 1$ kΩ, $R_2 = 4$ kΩ, $R_3 = 5$ kΩ, $R_4 = 600\ \Omega$, $R_5 = 1,6$ kΩ i $R_6 = 2$ kΩ. Izračunati jačinu struje I. (*Z900124*)

REZULTAT:
Tražena jačina struje je $I = -10$ mA.

188. U kolu prikazanom na slici 188.1 poznato je: $E_1 = 120$ V, $E_2 = 100$ V, $I_{g1} = 0,1$ A, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 35\ \Omega$, $R_5 = 100\ \Omega$, $R_6 = R_7 = 50\ \Omega$,

$R_8 = 25\ \Omega$, $P_{I_{g1}} = -4,6$ W i $P_{E_2} = 20$ W. Izračunati otpornost R_1. (*Z921020*)

Slika 188.1.

REŠENJE:
U cilju uprošćenja datoga kola, paralelnu vezu idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E_1 i otpornika otpornosti R_3 zamenjujemo samo tim idealnim generatorom. Takođe, paralelnu vezu idealnog strujnog generatora I_{g2} i otpornika otpornosti R_5 zamenjujemo realnim naponskim generatorom (nepoznate) elektromotorne sile $E_3 = R_5 I_{g2}$ i unutrašnje otpornosti R_5. Najzad, trougao R_6–R_7–R_8 transfigurišemo u zvezdu otpornika otpornosti $R_9 = 20\ \Omega$ i $R_{10} = R_{11} = 10\ \Omega$, čime dobijamo kolo prikazano na slici 188.2.

Za sistem nezavisnih kontura označenih na slici 188.2, jednačine po metodi konturnih struja glase:

$$I_{\rm I} = I_{g1}\ , \tag{188.1}$$

$$(R_5 + R_{11} + R_{10})I_{\rm I} + (R_1 + R_2 + R_5 + R_{11} + R_{10})I_{\rm II} + (R_2 + R_5 + R_{11})I_{\rm III} = -E_3 + E_1\ . \tag{188.2}$$

$$(R_5+R_{11})I_{\rm I}+(R_2+R_5+R_{11})I_{\rm II}+(R_2+R_5+R_{11}+R_9+R_4)I_{\rm III} = -E_3+E_2\ , \tag{188.3}$$

pri čemu je, za zadate snage generatora,

$$I_{\rm III} = I_2 = \frac{P_{E_2}}{E_2}\ , \tag{188.4}$$

$$-R_1 I_{\rm II} - R_2(I_{\rm II} + I_{\rm III}) = U_{31} = \frac{P_{I_{g1}}}{I_{g1}}\ . \tag{188.5}$$

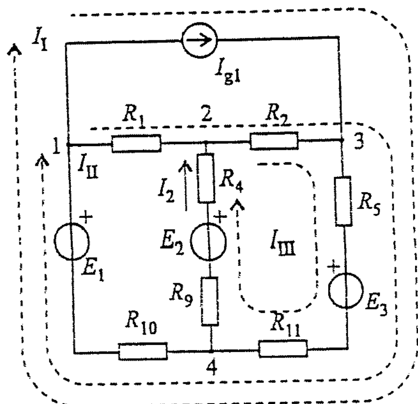
Zamenom brojnih vrednosti (otpornosti u Ω, jačina struja u A i napona, odnosno elektromotornih sila u V) odavde dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$(R_1 I_{\rm II}) + 150 I_{\rm II} + E_3 = 80\ , \tag{188.6}$$

$$140 I_{\rm II} + E_3 = 50\ , \tag{188.7}$$

$$(R_1 I_{\rm II}) + 30 I_{\rm II} = 40\ , \tag{188.8}$$

čije je rešenje: $(R_1 I_{\rm II}) = 25$ V, $I_{\rm II} = 0,5$ A i $E_3 = -20$ V. Odavde je $R_1 = 50\ \Omega$.



Slika 188.2.

Slika 189.1.

189. U kolu prikazanom na slici 189.1 poznato je: $E_1 = 20$ V, $E_2 = 15$ V, $E_3 = 5$ V, $I_g = 100$ mA, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, $R_4 = 75\ \Omega$ i $C = 100\ \mu$F. Prekidač Π je najpre otvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. Prekidač Π je zatim zatvoren. Izračunati količinu elektriciteta proteklu kroz granu sa kondenzatorom od trenutka zatvaranja prekidača do uspostavljanja novog stacionarnog stanja. (*Z900202*)

REŠENJE:
U prvom stacionarnom stanju, kada je prekidač Π otvoren, jednačine po metodi konturnih struja za nezavisne konture prikazane na slici 189.2 glase

$$I_{\rm I} = I_g\ , \tag{189.1}$$

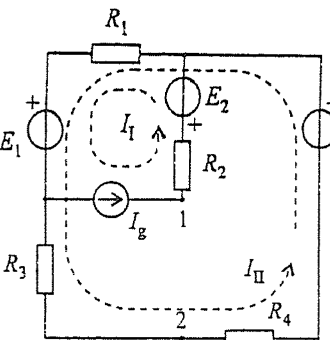
$$R_1 I_{\rm I} + (R_1 + R_3 + R_4)I_{\rm II} = E_3 - E_1\ . \tag{189.2}$$

Za zadate brojne vrednosti dobijamo $I_{\rm I} = 0,1$ A i $I_{\rm II} = -2/30$ A. Napon kondenzatora je

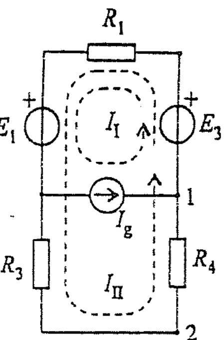
$$U_{12}^{(1)} = -R_4 I_{\rm II} + E_3 + E_2 + R_2 I_{\rm I} = 40\ \text{V}\ . \tag{189.3}$$

U stacionarnom stanju uspostavljenom nakon zatvaranja prekidača Π, paralelna veza realnog naponskog generatora elektromotorne sile E_2 i otpornosti R_2 i idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E_3 ekvivalentna je ovom drugom generatoru. Tako dobijamo kolo prikazano na slici 189.3. Za nezavisne konture prikazane na slici sistem jednačina po metodi konturnih struja glasi isto kao za kolo sa slike 189.2, pa su i rešenja ta dva sistema jednačina identična. Napon kondenzatora u drugom stacionarnom stanju je

$$U_{12}^{(2)} = -R_4 I_{\rm II} = 5\ \text{V}\ . \tag{189.4}$$



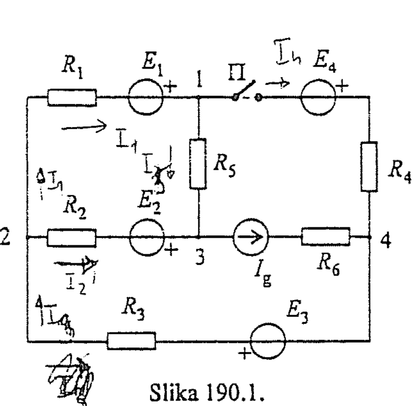
Slika 189.2.



Slika 189.3.

Traženi protok kroz granu sa kondenzatorom iznosi

$$q_{12} = C(U_{12}^{(2)} - U_{12}^{(1)}) = -3,5\ \text{mC} . \tag{189.5}$$



Slika 190.1.

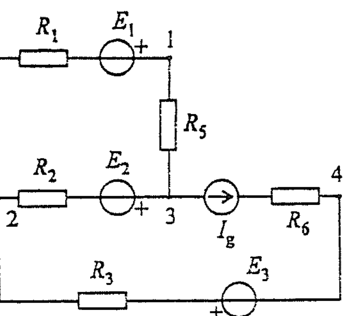
190. U kolo prikazano na slici 190.1 poznato je: $E_1 = E_3 = 25$ mV, $E_2 = 4$ mV, $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $R_3 = R_4 = R_6 = 2$ kΩ i $R_5 = 4$ kΩ. Kada je prekidač Π otvoren, tada je napon $U_{23} = 5$ mV, a kada je prekidač zatvoren, tada je $U_{23}' = 6$ mV. Odrediti elektromotornu silu E_4. (*Z890926*)

REŠENJE:

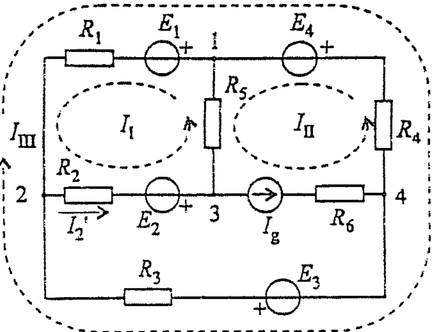
Nepoznata su dva parametra kola - eksitacije E_4 i I_g. Za svako stacionarno stanje kola poznat je jedan odziv - odgovarajući napon između čvorova 2 i 3. Analizom kola u prvom stacionarnom stanju, kada je prekidač Π otvoren, određujemo jačinu struje idealnog strujnog generatora, I_g. Za kolo u drugom stacionarnom stanju preostaje, potom, samo jedan nepoznat parametar - tražena elektromotorna sila E_4.

Dato kolo pri otvorenom prekidaču Π ima samo dva čvora (slika 190.2). Ako čvor 3 usvojimo za referentni, jednačina napisana po metodi potencijala čvorova glasi

$$\left(\frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_2}\right) U_{23} = -\frac{E_1}{R_1 + R_5} - \frac{E_2}{R_2} + I_g \tag{190.1}$$



Slika 190.2.



Slika 190.3.

(otpornost grane sa idealnim strujnim generatorom je beskonačno velika). Kako je napon U_{23} poznat, iz gornje jednačine dobijamo $I_g = 15\ \mu$A.

Kada je prekidač Π zatvoren, kolo izgleda kao na slici 190.3. Sada primenjujemo metodu konturnih struja. Kolo ima tri nezavisne konture. Međutim, ako se konture odaberu kao na slici, dve konturne struje su poznate. Naime, $I_{II} = I_g = 15\ \mu$A i

$$I_I = I_2' = \frac{U_{23}' + E_2}{R_2} = 20\ \mu\text{A} \tag{190.2}$$

(na osnovu Omovog zakona za granu između čvorova 2 i 3, čiji je napon poznat). Na taj način, iz jednačine za prvu konturu,

$$(R_1 + R_2 + R_5)I_2' - R_5 I_g - R_1 I_{III} = -E_1 + E_2 , \tag{190.3}$$

dobijamo $I_{III} = 21\ \mu$A. Sada iz jednačine za treću konturu,

$$-R_1 I_2' - R_4 I_g + (R_1 + R_4 + R_3) I_{III} = E_1 + E_4 + E_3 , \tag{190.4}$$

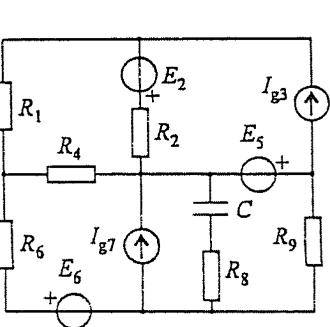
konačno sledi $E_4 = 15$ mV.

191. U kolu prikazanom na slici 191.1 poznato je: $E_2 = 5$ V, $E_5 = 10$ V, $E_6 = 1$ V, $I_{g3} = 5$ mA, $I_{g7} = 14$ mA, $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $R_6 = R_8 = 500$ Ω, $R_9 = 2$ kΩ, $C = 100\ \mu$F i električna energija kondenzatora u stacionarnom stanju $W_e = 1,8$ mJ. Izračunati otpornost R_4. (*Z900402*)

REŠENJE:

Obeležimo čvorove kola kao na slici 191.2. Jednačine po metodi potencijala čvorova, za čvor 0 kao referentni, glase

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_1 - \frac{V_2}{R_1} = -\frac{E_2}{R_2} + I_{g3} , \tag{191.1}$$



Slika 191.1.

Slika 191.2.

$$-\frac{V_1}{R_1}+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_6}\right)V_2-\frac{V_3}{R_6}=\frac{E_6}{R_6}, \tag{191.2}$$

$$-\frac{V_2}{R_6}+\left(\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_9}\right)V_3-\frac{V_4}{R_9}=-\frac{E_6}{R_6}-I_{g7}, \tag{191.3}$$

$$V_4=E_5. \tag{191.4}$$

Zamenom brojnih vrednosti (otpornosti u kΩ, jačina struja u mA i elektromotornih sila u V), dobijamo

$$2V_1-V_2=0, \tag{191.5}$$

$$-V_1+\left(3+\frac{1}{R_4}\right)V_2-2V_3=2, \tag{191.6}$$

$$-4V_2+5V_3-V_4=-32, \tag{191.7}$$

$$V_4=10. \tag{191.8}$$

Iz gornjih jednačina sledi

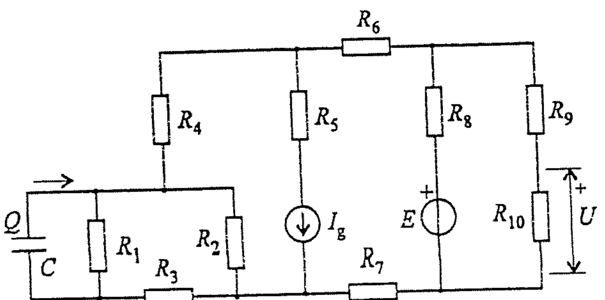
$$R_4=-\frac{10V_3+44}{9V_3+94} \tag{191.9}$$

(V_3 u voltima, a R_4 u omima).

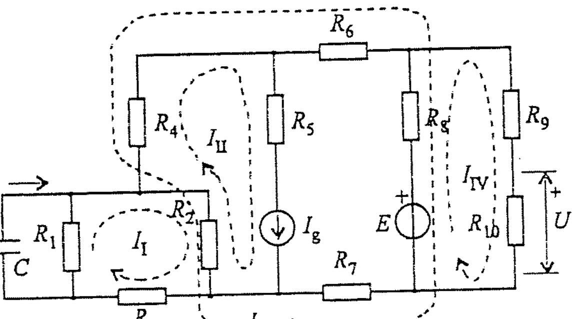
Na osnovu poznate energije kondenzatora, potencijal čvora 3 iznosi

$$V_3=\pm\sqrt{\frac{2W_e}{C}}=\pm 6\ \text{V}. \tag{191.10}$$

Pod pretpostavkom $V_3=6$ V, iz (191.9) se dobija negativna otpornost za R_4, što nema fizičkog smisla. Dakle, $V_3=-6$ V, odakle sledi $R_4=400\ \Omega$.



Slika 192.1.



Slika 192.2.

192. U kolu prikazanom na slici 192.1 je $E=40$ V, $I_g=5$ mA, $R_1=5$ kΩ, $R_2=15$ kΩ, $R_3=25$ kΩ, $R_5=5$ kΩ, $R_6=30$ kΩ, $R_7=15$ kΩ, $R_9=R_{10}=5$ kΩ, $C=10\ \mu$F, $U=15$ V i $Q=50\ \mu$C. Izračunati R_4 i R_8. (*Z960930*)

REŠENJE:

Za sistem nezavisnih kontura prikazan na slici 192.2, jednačine po metodi konturnih struja glase

$$(R_1+R_2+R_3)I_I-R_2I_{II}-R_2I_{III}=0, \tag{192.1}$$

$$I_{II}=I_g, \tag{192.2}$$

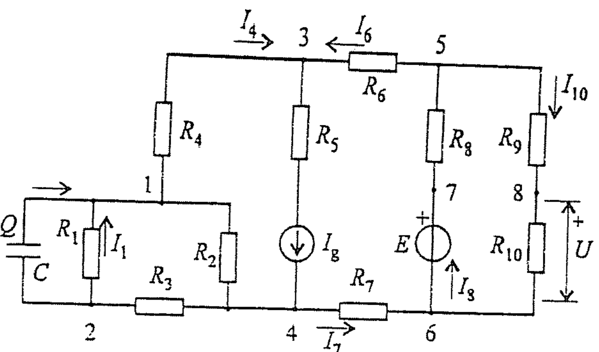
$$-R_2I_I+(R_2+R_4)I_{II}+(R_2+R_4+R_6+R_8+R_7)I_{III}-R_8I_{IV}=-E, \tag{192.3}$$

$$-R_8I_{III}+(R_8+R_9+R_{10})I_{IV}=E, \tag{192.4}$$

pri čemu je, prema uslovima zadatka,

$$I_I=\frac{Q}{CR_1}=1\ \text{mA}, \qquad I_{IV}=\frac{U}{R_{10}}=3\ \text{mA}. \tag{192.5}$$

Rešavanjem gornjih jednačina dobijamo $I_{III}=-2$ mA, $R_8=2$ kΩ i $R_4=10$ kΩ.



Slika 192.3.

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, bez primene neke od šematizovanih metoda rešavanja kola kojima se direktno rešava kolo u celini. Naime, krenućemo od elemenata na kojima su, prema uslovima zadatka, lokalizovani poznati odzivi u kolu i postepeno određivati struje i napone elemenata kola ("raspetljavati kolo") ka onim elementima čije karakteristike tražimo.

Obeležimo čvorove kola kao na slici 192.3. Jedan od poznatih odziva predstavlja opterećenje kondenzatora. Q, na osnovu koga, napon otpornika otpornosti R_1 iznosi

$$U_{21} = \frac{Q}{C} = 5\ \text{V}\ , \tag{192.6}$$

pa je jačina struje toga otpornika, a ujedno i otpornika otpornosti R_3, $I_1 = U_{21}/R_1 = 1$ mA. Iz jednačine strujnog razdelnika koji čine redna veza otpornika otpornosti R_1 i R_3 i otpornik otpornosti R_2 dobijamo

$$I_4 = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2} I_1 = 3\ \text{mA}\ . \tag{192.7}$$

Na osnovu prvog Kirhofovog zakona za čvor 3, odnosno čvor 4,

$$I_6 = I_7 = I_g - I_4 = 2\ \text{mA}\ . \tag{192.8}$$

Drugi poznati odziv je napon U. Na osnovu toga napona, iz jednačine razdelnika napona koji čine otpornici otpornosti R_9 i R_{10} sledi

$$U_{56} = \frac{R_9 + R_{10}}{R_{10}} U = 30\ \text{V}\ , \tag{192.9}$$

odakle je

$$U_{13} = R_6 I_6 - U_{56} + R_7 I_7 - (R_1 + R_3) I_1 = 30\ \text{V} \tag{192.10}$$

i $R_4 = U_{13}/I_4 = 10$ kΩ.

Jačina struje kroz otpornik otpornosti R_{10} je $I_{10} = U/R_{10} = 3$ mA, pa je struja kroz naponski generator

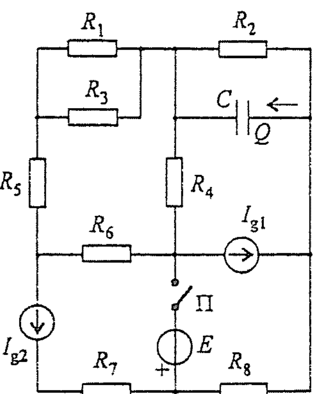
$$I_8 = I_7 + I_{10} = 5\ \text{mA}\ . \tag{192.11}$$

Konačno, napon otpornika otpornosti R_8 je

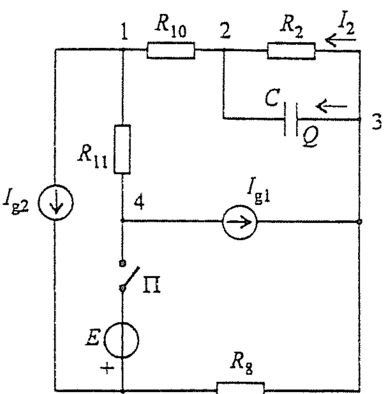
$$U_{75} = -U_{56} + E = 10\ \text{V}\ , \tag{192.12}$$

pa je $R_8 = U_{75}/I_8 = 2$ kΩ.

193. U kolu prikazanom na slici 193.1 poznato je: $I_{g1} = 2$ mA, $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 300$ Ω, $R_3 = R_4 = 3$ kΩ, $R_5 = 1,8$ kΩ, $R_6 = 4$ kΩ, $R_7 = 1$ kΩ, $R_8 = 600$ Ω i $C = 200$ μF. U stacionarnom stanju kada je prekidač Π zatvoren, opterećenost kondenzatora je $Q = 60$ μC. U stacionarnom stanju kada je prekidač Π otvoren, energija kondenzatora je $W_e = 81$ μJ, a strujni generator jačine struje I_{g1} se ponaša kao prijemnik. Izračunati elektromotornu silu E. (*Z950619*)



Slika 193.1.



Slika 193.2.

REŠENJE:
Mešovitu vezu otpornika otpornosti R_1, R_3 i R_5 možemo zameniti jednim otpornikom, otpornosti $R_9 = 3$ kΩ. Trougao koji čine otpornici otpornosti R_4, R_6 i R_9 možemo, zatim, zameniti zvezdom otpornika otpornosti $R_{10} = 900$ Ω i $R_{11} = R_{12} = 1,2$ kΩ. Otpornici otpornosti R_{12} i R_7, vezani na red sa idealnim strujnim generatorom, nemaju uticaja na rešenje ovog zadatka, pa se mogu zameniti kratkim spojevima. Tako se dobija kolo prikazano na slici 193.2.

Sem tražene elektromotorne sile E, za dato kolo je nepoznata i struja generatora I_{g2}. Kada je prekidač Π zatvoren, na stanje u kolu utiču obe nepoznate eksitacije. Stoga ćemo prvo analizirati stanje u kome je prekidač Π otvoren, tj. u kome je naponski generator u praznome hodu. Kao rezultat te analize odredićemo struju

generatora I_{g2}. Na taj način, u stacionarnom stanju kada je prekidač zatvoren, ostaje kao nepoznata samo jedna eksitacija - elektromotorna sila E.

Kada je prekidač Π otvoren, energija kondenzatora je $W_e = CU_{32}^2/2$, odakle je

$$U_{32} = \pm\sqrt{\frac{2W_e}{C}} = \pm 0,9 \text{ V} . \qquad (193.1)$$

Stoga je $I_2 = U_{32}/R_2 = \pm 3$ mA, odakle, na osnovu prvog Kirhofovog zakona za čvor 1, sledi

$$I_{g2} = I_2 - I_{g1} = \begin{cases} 1 \text{ mA} & \text{za } U_{32} > 0 \\ -5 \text{ mA} & \text{za } U_{32} < 0 \end{cases} \qquad (193.2)$$

Napon strujnog generatora struje I_{g1} koji odgovara prvom rešenju za I_{g2} je

$$U_{34} = R_{11}I_{g1} + R_{10}I_2 + U_{32} = 6 \text{ V} , \qquad (193.3)$$

dok drugom rešenju odgovara napon $U_{34} = -1,2$ V. Kako, prema uslovu zadatka, strujni generator I_{g1} radi kao prijemnik, u obzir dolazi samo drugo rešenje, dakle, $I_{g2} = -5$ mA.

Kada je prekidač Π zatvoren, jačina struje otpornika R_2 je

$$I_2' = \frac{Q}{CR_2} = 1 \text{ mA} . \qquad (193.4)$$

Jačina struje generatora elektromotorne sile E, za referentni smer od čvora 4 ka čvoru 5, dobija se iz prvog Kirhofovog zakona za čvorove 5 i 3,

$$I_E' = I_2' - I_{g1} - I_{g2} = 4 \text{ mA} . \qquad (193.5)$$

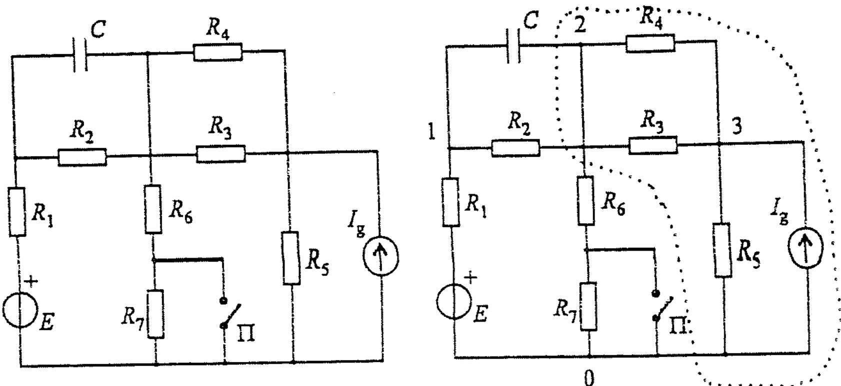
Najzad,

$$E = U_{54}' = R_{11}(I_{g1} + I_E') + (R_2 + R_{10})I_2' + R_8(I_2 - I_{g1}) = 7,8 \text{ V} . \qquad (193.6)$$

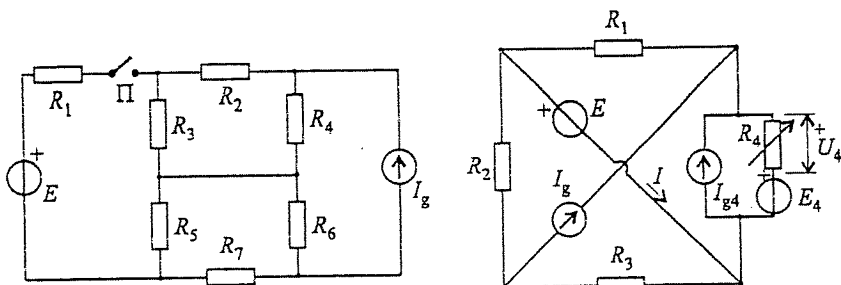
194. U kolu stalne struje prikazanom na slici 194.1 je $E = 50$ V, $I_g = 10$ mA, $R_1 = 6$ kΩ, $R_2 = 4$ kΩ, $R_3 = 4,5$ kΩ, $R_4 = 9$ kΩ, $R_6 = 1$ kΩ i $C = 5$ μF. U stacionarnom stanju kada je prekidač Π zatvoren, energija kondenzatora je $W_{e1} = 640$ μJ. Priraštaj energije kondenzatora po otvaranju prekidača Π je $\Delta W_{e1} = -600$ μJ. Izračunati otpornost R_7. (*Z960618*)

REZULTAT:
U stacionarnom stanju sa zatvorenim prekidačem je $U_{12} = \pm 16$ V (slika 194.2). Polazeći od pozitivnog rešenja, dobija se $R_5 = 7$ kΩ, dok negativno rešenje rezultuje u $R_5 < 0$, pa ga treba odbaciti. Sada je pogodno deo kola desno od čvorova 2 i 0, označen na slici 194.2, zameniti Tevenenovim generatorom (koji ostaje isti i u drugom stacionarnom stanju).

U stacionarnom stanju kada je prekidač otvoren, $U_{12} = \pm 4$ V. Gornjem znaku odgovara $R_7 \to \infty$, a donjem $R_7 = 9$ kΩ.



Slika 194.1. Slika 194.2.



Slika 195.1. Slika 196.1.

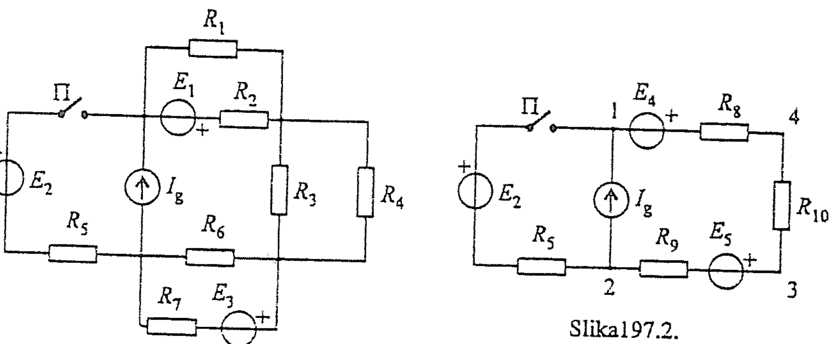
195. U kolu prikazanom na slici 195.1 poznato je: $I_g = 2$ mA, $R_1 = 800$ Ω, $R_2 = R_7 = 1$ kΩ i $R_3 = R_4 = R_5 = R_6 = 2$ kΩ, a prekidač Π je otvoren. Po zatvaranju prekidača Π priraštaj snage idealnog strujnog generatora je $\Delta P_{I_g} = -2,4$ mW. Izračunati elektromotornu silu E. (*Z910129*)

REZULTAT:
Tražena elektromotorna sila je $E = 0,8$ V.

196. Za kolo stalne struje prikazano na slici 196.1 je $E = 5$ V, $E_4 = 6$ V, $I_g = 1$ A, $I_{g4} = -3$ A, $R_1 = 2$ Ω, $R_2 = 3$ Ω i $R_3 = 5$ Ω. Odrediti u kojim granicama treba da se menja otpornost R_4 tako da se jačina struje I menja u granicama $I \in [-3\text{ A}, -1\text{ A}]$. U kojim granicama se tada menja napon U_4? (*Z950304*)

REZULTAT:
Opsezi u kojima se veličine nalaze su $R_4 \in [0,22\ \Omega, 18\ \Omega]$ i $U_4 \in [-4,5\text{ V}, -0,5\text{ V}]$.

197. U kolu prikazanom na slici 197.1 poznato je: $E_1 = 25$ V, $E_3 = 4$ V, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 200\ \Omega$, $R_4 = 800\ \Omega$, $R_5 = 50\ \Omega$ i $R_6 = R_7 = 160\ \Omega$. Kada je prekidač Π otvoren, snaga koju razvija strujni generator je $P_{I_g} = 2,2$ W, a idealni naponski generator elektromotorne sile E_3 se ponaša kao prijemnik. Kada je prekidač Π zatvoren, snaga otpornika otpornosti R_4 je $P_{R_4} = 320$ mW, a strujni generator se ponaša kao prijemnik. Izračunati elektromotornu silu E_2. (*Z920131*)



Slika 197.1.

Slika197.2.

REŠENJE:
Paralelenu vezu otpornika otpornosti R_1 i realnog naponskog generatora E_1–R_2 zamenjujemo ekvivalentnim naponskim generatorom elektromotorne sile $E_4 = E_1 R_1/(R_1+R_2) = 10$ V i unutrašnje otpornosti $R_8 = R_1 \parallel R_2 = 60\ \Omega$. Slično tome, paralelnu vezu otpornika otpornosti R_6 i generatora E_3–R_7 transfigurišemo u ekvivalentan generator eletromotorne sile $E_5 = 2$ V i unutrašnje otpornosti $R_9 = 80\ \Omega$. Najzad, paralelenu vezu otpornika otpornosti R_3 i R_4 zamenjujemo otpornikom otpornosti $R_{10} = 160\ \Omega$. Tako dobijamo jednostavnije kolo prikazano na slici 197.2.

Uočimo da je sem tražene elektromotorne sile E_2, nepoznata i jačina struje strujnog generatora, I_g. Ovu struju odredujemo analizom kola pri otvorenom prekidaču Π. U tome stanju napon strujnog generatora je

$$U_{12} = (R_9 + R_{10} + R_8)I_g + E_5 - E_4 , \qquad (197.1)$$

a snaga $P_{I_g} = U_{12} I_g$. Za zadate brojne vrednosti odavde dobijamo sledeću jednačinu:

$$300 I_g^2 - 8 I_g - 2,2 = 0 , \qquad (197.2)$$

čija su rešenja $I_g^{(1)} = 0,1$ A i $I_g^{(2)} = -0,0733$ A. U prvom slučaju, $U_{23}^{(1)} = -10$ V, pa je jačina struje kroz generator elektromotorne sile E_3, data izrazom

$$I_{23} = \frac{U_{23} + E_3}{R_7} \qquad (197.3)$$

(videti sliku 197.1), negativna, $I_{23}^{(1)} = -37,5$ mA, tako da se taj generator ponaša kao prijemnik. U drugom slučaju je $U_{23}^{(2)} = 1,867$ V, pa je $I_{23}^{(2)} > 0$ i naponski

generator elektromotorne sile E_3 se ponaša kao generator. Po uslovima zadatka drugo rešenje otpada, pa je $I_g = 0,1$ A. Sada se desni deo kola može zameniti Tevenenovim generatorom, parametara

$$E_T = U_{12} = 22\ \text{V} , \qquad R_T = R_8 + R_9 + R_{10} = 300\ \Omega \qquad (197.4)$$

(slika 197.3).

Kada je prekidač Π zatvoren, jačina struje u kolu sa slike 197.3 je

$$I' = \frac{E_T - E_2}{R_T + R_5} . \qquad (197.5)$$

To je, istovremeno, i struja kroz generator elektromotorne sile E_2 u kolu sa slike 197.1, pa je jačina struje kroz otpornik otpornosti R_4 data sledećim izrazom:

$$I'_{34} = \frac{R_3}{R_3 + R_4}(I' - I_g) . \qquad (197.6)$$

Ova struja, na osnovu poznate snage otpornika otpornosti R_4, iznosi

$$I'_{34} = \pm\sqrt{\frac{P_{34}}{R_4}} = \pm 20\ \text{mA} . \qquad (197.7)$$

Gornjem znaku odgovara $U'_{12} = -38$ V, pa se strujni generator ponaša kao prijemnik. Donjem znaku odgovara $U'_{12} = 22$ V, pa strujni generator u tome slučaju radi kao generator, što nije u skladu sa uslovima zadatka. Dakle, $I'_{34} = 20$ mA, pa je, na osnovu jednačina (197.6) i (197.5), $E_2 = -48$ V.

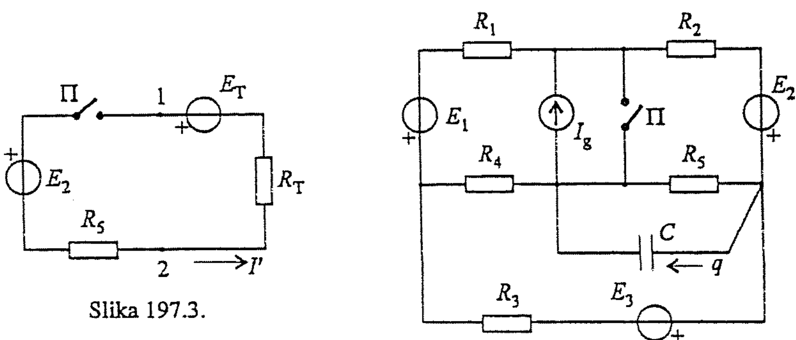
198. Za kolo stalne struje sa slike 198.1 je poznato $E_1 = 4$ V, $E_2 = 1$ V, $R_1 = R_5 = 200\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 400\ \Omega$ i $C = 1\ \mu$F. (a) Odrediti struju idealnog strujnog generatora I_g tako da po zatvaranju prekidača Π kroz kondenzator protekne količina elektriciteta $q = 4\ \mu$C. (b) Kolika je snaga koju razvija idealni strujni generator pri otvorenom prekidaču Π? (*Z930619*)

REŠENJE:
(a) Po teoremi kompenzacije, paralelnu vezu idealnog strujnog generatora I_g i prekidača Π, možemo zameniti idealnim naponskim generatorom, kao što je prikazano na slici 198.2. Elektromotorna sila toga generatora je

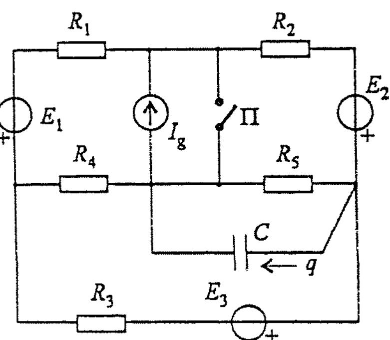
$$E_k = \begin{cases} U_{12}^{(o)} & \text{kada je prekidač Π otvoren} \\ 0 & \text{kada je prekidač Π zatvoren} \end{cases} \qquad (198.1)$$

gde je $U_{12}^{(o)}$ napon idealnog strujnog generatora u stacionarnom stanju sa otvorenim prekidačem Π (pri zatvorenom prekidaču, $U_{12}^{(z)} = 0$). Na osnovu teoreme superpozicije, napon kondenzatora se može predstaviti u sledećem obliku:

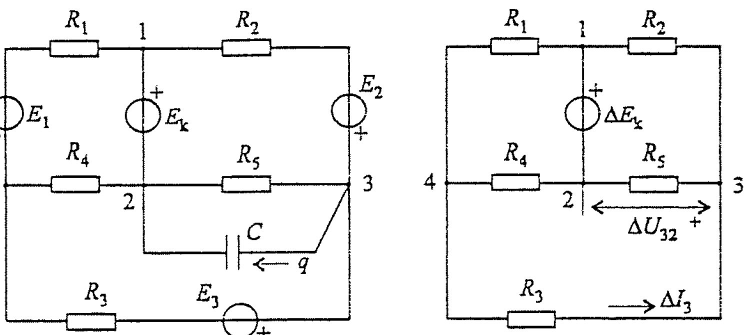
$$U_{32} = U_{32}(E_k) + U_{32}(E_1, E_2, E_3) . \qquad (198.2)$$



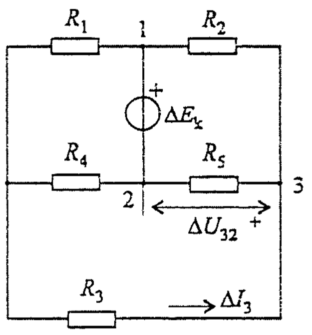
Slika 197.3.



Slika 198.1.



Slika 198.2.



Slika 198.3.

Promena napona U_{32} od jednog do drugog stacionarnog stanja, ΔU_{32}, posledica je promene eksitacije E_k (ostale eksitacije se ne menjaju). Kako iz teoreme linearnosti proizilazi

$$U_{32}(E_k) = aE_k \qquad (a = \text{const}) , \tag{198.3}$$

to je

$$\Delta U_{32} = a\Delta E_k = U_{32}(\Delta E_k) , \tag{198.4}$$

gde je, na osnovu (198.1),

$$\Delta E_k = -U_{12}^{(o)} . \tag{198.5}$$

Prema relaciji (198.4), napon ΔU_{32} predstavlja odziv kola sa slike 198.2 na eksitaciju ΔE_k pri čemu su elektromotorne sile E_1, E_2 i E_3 anulirane (slika 198.3). Uočimo da otpornici otpornosti R_1, R_2, R_4 i R_5 čine most. Pošto je ispunjen uslov (129.1), zaključujemo da je most u ravnoteži, pa je $\Delta I_3 = 0$ i granu sa otpornikom

otpornosti R_3 možemo zameniti otvorenom vezom. Stoga je

$$\Delta U_{32} = \frac{R_5}{R_2 + R_5}\Delta E_k ; \tag{198.6}$$

odnosno

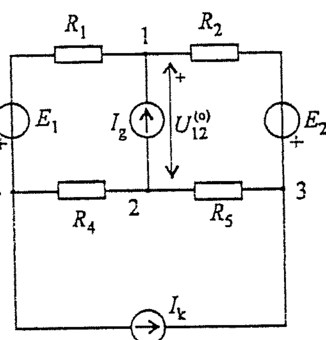
$$a = \frac{R_5}{R_2 + R_5} = \frac{2}{3} . \tag{198.7}$$

Protok elektriciteta q po zatvaranju prekidača Π je

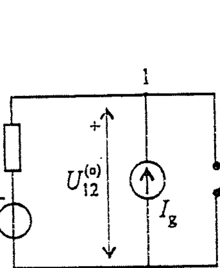
$$q = \Delta Q_{32} = C\Delta U_{32} ; \tag{198.8}$$

pa na osnovu relacija (198.4), (198.5) i (198.7) imamo

$$U_{12}^{(o)} = -\frac{q}{Ca} = -6\ \text{V} . \tag{198.9}$$



Slika 198.4.



Slika 198.5.

Sada za kolo sa slike 198.1 pri otvorenom prekidaču Π znamo jedan odziv (napon između priključaka idealnog strujnog generatora), a nepoznate su dve eksitacije (tražena struja I_g i elektromotorna sila E_3). Zamenimo granu koja sadrži naponski generator elektromotorne sile E_3 idealnim strujnim kompenzacionim generatorom čija je jačina struje I_k jednaka jačini struje te grane u posmatranom stacionarnom stanju (slika 198.4). Po teoremi superpozicije je

$$U_{12}^{(o)} = U_{12}^{(o)}(E_1) + U_{12}^{(o)}(E_2) + U_{12}^{(o)}(I_g) + U_{12}^{(o)}(I_k) . \tag{198.10}$$

Kako je most u ravnoteži, to je

$$U_{12}^{(o)}(I_k) = 0 . \tag{198.11}$$

Sledstveno tome,

$$U_{12}^{(o)} = \underbrace{-\frac{R_2 + R_5}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}E_1}_{U_{12}^{(o)}(E_1)} + \underbrace{\left(-\frac{R_1 + R_4}{R_1 + R_2 + R_4 + R_5}E_2\right)}_{U_{12}^{(o)}(E_2)} +$$

$$\underbrace{\frac{(R_1+R_4)(R_2+R_5)}{R_1+R_2+R_4+R_5}I_g}_{U_{12}^{(o)}(I_g)}\,, \qquad (198.12)$$

odakle je, na osnovu (198.9), $I_g = -20$ mA.

Uočimo da se izraz (198.12) može napisati i u sledećem obliku:

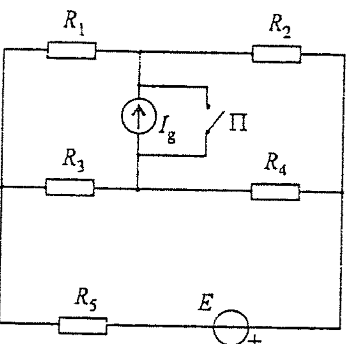
$$U_{12}^{(o)} = E_T + R_T I_g\,. \qquad (198.13)$$

Naime, u odnosu na idealan strujni generator i prekidač, ostatak kola sa slike 198.1 između tačaka 1 i 2 može se zameniti Tevenenovim generatorom (slika 198.5) parametara

$$E_T = U_{12}^{(o)}(E_1) + U_{12}^{(o)}(E_2)\,, \qquad R_T = \frac{U_{12}^{(o)}(I_g)}{I_g}\,. \qquad (198.14)$$

(b) Snaga koju razvija idealni strujni generator pri otvorenom prekidaču Π je

$$P_{I_g} = U_{12}^{(o)} I_g = 120 \text{ mW}\,. \qquad (198.15)$$



Slika 199.1.

199. U kolu stalne struje prikazanom na slici 199.1 poznato je: $E = 75$ V, $R_1 = R_3 = 3$ kΩ, $R_2 = 6$ kΩ, $R_4 = 12$ kΩ i $R_5 = 750$ Ω. Snaga idealnog naponskog generatora je ista kada je prekidač Π otvoren i kada je zatvoren. Izračunati (a) jačinu struje idealnog strujnog generatora i (b) snagu tog generatora kada je prekidač Π otvoren. (*Z930921*)

REŠENJE:

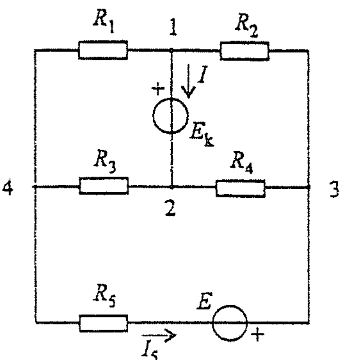
Uvedimo idealan naponski kompenzacioni generator kao na slici 199.2. Elektromotorna sila E_k je data u (198.1). Na osnovu teorema superpozicije i linearnosti, priraštaj jačine struje idealnog naponskog generatora elektromotorne sile E kao rezultat zatvaranja prekidača Π linearno je srazmeran priraštaju elektromotorne sile E_k i predstavlja odziv kola na eksitaciju ΔE_k, tj.

$$\Delta I_5 = a\Delta E_k = I_5(\Delta E_k) \qquad (a = \text{const})\,. \qquad (199.1)$$

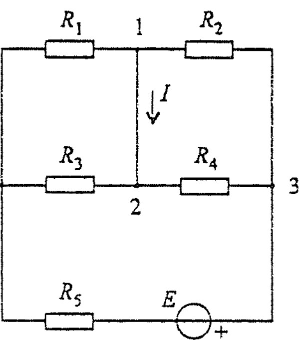
Iz uslova zadatka je $\Delta I_5 = 0$ (snaga idealnog naponskog generatora se ne menja). Pošto most koji čine otpornici otpornosti R_1, R_2, R_3 i R_4 nije u ravnoteži, $a \neq 0$. Stoga je

$$\Delta E_k = \frac{\Delta I_5}{a} = 0\,, \qquad (199.2)$$

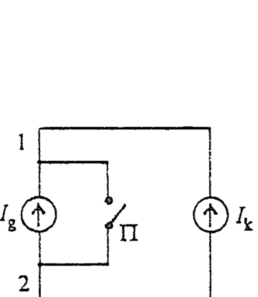
pa iz relacije (198.5) sledi da je napon, a time i snaga, idealnog strujnog generatora uvek nula, što predstavlja odgovor na pitanje pod (b).



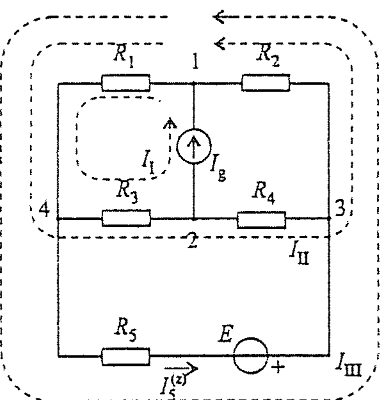
Slika 199.2.



Slika 199.3.



Slika 199.4.



Slika 199.5.

Kako je u oba stacionarna stanja $E_k = 0$, to se kolo sa slike 199.2 može predstaviti kao na slici 199.3. Jačina struje u grani kojom su kratko spojeni čvorovi 1 i 2 je

$$I = \left(\frac{R_4}{R_2+R_4} - \frac{R_3}{R_1+R_3}\right)\frac{E}{R_5+R_e} = 2 \text{ mA}\,, \qquad R_e = R_1 \parallel R_3 + R_2 \parallel R_4\,, \qquad (199.3)$$

gde je R_e ekvivalentna otpornost mosta. To je istovremeno jačina struje kroz paralelenu vezu idealnog strujnog generatora I_g i prekidača Π u kolu sa slike 199.1.

Stoga se, u odnosu na tu paralelenu vezu, ostatak kola može zameniti idealnim strujnim kompenzacionim generatorom jačine struje $I_k = I$ (slika 199.4), koja je, prema ranijem, ista u oba stacionarna stanja. Iz stanja sa otvorenim prekidačem Π sledi

$$I_g = -I_k = -2\ \text{mA}\,, \qquad (199.4)$$

čime smo odgovorili i na pitanje pod (a).

Zadatak možemo rešiti i bez primene teorema električnih kola, analizom datog kola u dva stacionarna stanja.

Struja idealnog naponskog generatora pri zatvorenom prekidaču Π je

$$I_5^{(z)} = \frac{E}{R_5 + R_e} = 12\ \text{mA}\,, \qquad (199.5)$$

gde je R_e ekvivalentna otpornost mosta, data u (199.3).

Kada je prekidač Π otvoren, kolo izgleda kao na slici 199.5. Za sistem nezavisnih kontura prikazan na slici, jednačine po metodi konturnih struja glase

$$I_I = I_g\,, \qquad (199.6)$$

$$(R_1 + R_3)I_I + (R_1 + R_3 + R_4 + R_2)I_{II} + (R_1 + R_2)I_{III} = 0 \qquad (199.7)$$

$$R_1 I_I + (R_1 + R_2)I_{II} + (R_1 + R_5 + R_2)I_{III} = E\,, \qquad (199.8)$$

a po uslovima zadatka je $I_{III} = 12$ mA (snaga idealnog naponskog generatora je ista u dva stacionarna stanja). Rešavanjem gornjih jednačina dobijamo $I_g = -2$ mA i $I_{II} = -4$ mA.

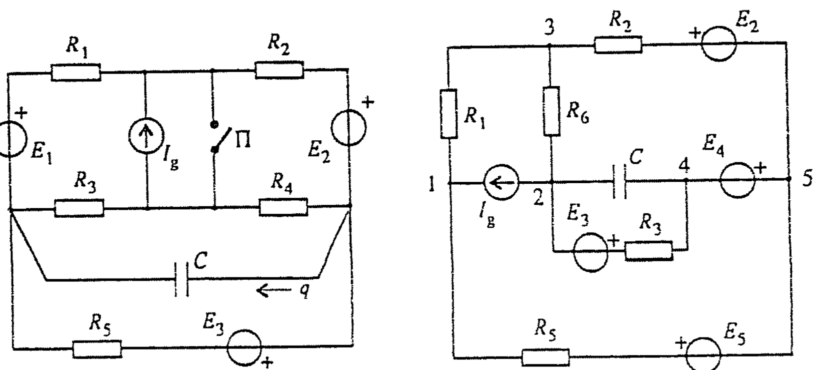
Napon idealnog strujnog generatora pri otvorenom prekidaču je

$$U_{12}^{(o)} = -R_4 I_{II} - R_2(I_{II} + I_{III}) = 0\,, \qquad (199.9)$$

pa je $P_{I_g}^{(o)} = 0$.

200. U kolu prikazanom na slici 200.1 je $E_1 = 12$ V, $E_2 = 6$ V, $E_3 = 1$ V, $R_1 = R_4 = 1$ kΩ, $R_2 = R_3 = R_5 = 2$ kΩ i $C = 10$ μF. Prekidač Π je otvoren i u kolu je uspostavljeno stacionarno stanje. Zatim se prekidač Π zatvori. Od trenutka zatvaranja prekidača do uspostavljanja drugog stacionarnog stanja kroz kondenzator protekne količina elektriciteta $q = 10$ μC. Izračunati snagu idealnog strujnog generatora u stacionarnom stanju kada je prekidač Π otvoren. (*Z900905*)

REZULTAT:
Snaga koju razvija strujni generator je $P_{I_g} = -15$ mW.



Slika 200.1.

Slika 201.1.

201. Za kolo stalne struje sa slike 201.1 je poznato: $E_5 = 50$ V, $R_1 = R_2 = 100$ Ω, $R_3 = 200$ Ω i $R_6 = 400$ Ω. Kada se elektromotorna sila E_4 promeni, ustanovi se priraštaj napona strujnog generatora $\Delta U_{12} = -17$ V i priraštaj struje naponskog generatora elektromotorne sile E_2 jednak $\Delta I_{35} = 30$ mA. Odrediti (a) otpornost R_5 i (b) priraštaj ΔE_4 elektromotorne sile E_4. (*Z930210*)

REZULTAT:
Tražene veličine su: (a) $R_5 = 200$ Ω i (b) $\Delta E_4 = -27$ V.

202. Za kolo stalne struje sa slike 202.1 je poznato: $I_g = 0,75$ A, $R_1 = R_2 = 300$ Ω, $R_3 = R_4 = R_5 = 100$ Ω, $R_6 = 50$ Ω, $R_7 = 200$ Ω, $R_8 = 100$ Ω, $C_1 = 1$ μF i $C_2 = 0,5$ μF. Prekidač Π je otvoren. Odrediti protoke elektriciteta kroz kondenzatore, q_1 i q_2, nakon zatvaranja prekidača Π, ako je opterećenost kondenzatora kapacitivnosti C_1 u novom stacionarnom stanju $Q_1 = 2$ μC. (*Z960224*)

REŠENJE:
Po teoremi kompenzacije, granu koja sadrži otpornik otpornosti R_7 i prekidač Π zamenjujemo idealnim strujnim generatorom (slika 202.2). Jačina struje ovog generatora je

$$I_k = \begin{cases} 0 & \text{kada je prekidač Π otvoren} \\ I_7 & \text{kada je prekidač Π zatvoren} \end{cases} \qquad (202.1)$$

gde je I_7 jačina struje kroz otpornik otpornosti R_7 u stacionarnom stanju kada je prekidač Π zatvoren. Po uslovima zadatka,

$$I_7 = \frac{Q_1}{C_1 R_7} = 10\ \text{mA}\,. \qquad (202.2)$$

Na osnovu teorema superpozicije i linearnosti, priraštaje napona kondenzatora, ΔU_{12} i ΔU_{23}, koji su posledica zatvaranja prekidača Π, tj. priraštaja struje

kompenzacionog strujnog generatora, $\Delta I_k = I_7$, možemo odrediti sa slike 202.3, pri čemu $R_e = 200\ \Omega$ predstavlja ekvivalentnu otpornost dela kola ispod kondenzatora. Konačno, protoci elektriciteta kroz kondenzatore su

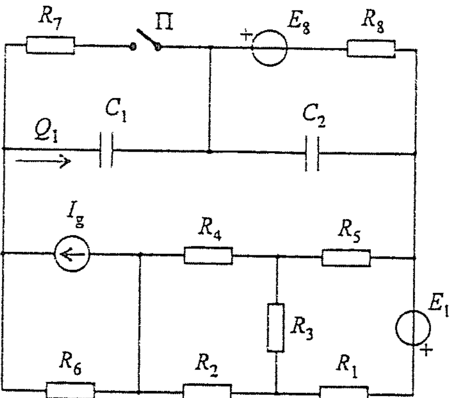
$$q_1 = C_1 \Delta U_{12} = -3\ \mu C\ , \qquad q_2 = C_2 \Delta U_{23} = 0,5\ \mu C\ , \qquad (202.3)$$

prema referentnim smerovima sa slike 202.2.

203. Za kolo stalne struje prikazano na slici 203.1 je $E_1 = 12$ V, $R_1 = 150\ \Omega$, $R_2 = 1\ k\Omega$ i $C = 0,1\ \mu F$. Pri zatvorenom prekidaču Π su poznati naponi $U_{21} = 15$ V i $U_{54} = 2$ V i jačina struje $I_{31} = 95$ mA. Odrediti protok kroz kondenzator posle otvaranja prekidača Π. (*Z940923*)

REZULTAT:
Tražena protekla količina elektriciteta je $q_{54} = -123,8$ nC

204. U kolu prikazanom na slici 204.1 poznato je: $E_2 = 12$ V, $E_3 = 10$ V, $I_g = 10$ mA, $R_1 = 800\ \Omega$, $R_2 = 1\ k\Omega$, $R_3 = 2\ k\Omega$, $R_4 = 3\ k\Omega$ i $C = 10\ \mu F$. Energija kondenzatora je ista u stacionarnim stanjima kada je prekidač Π otvoren i kada je zatvoren. U stacionarnom stanju kada je prekidač Π zatvoren, strujni generator se ponaša kao prijemnik. Izračunati elektromotornu silu E_1. (*Z910409*)



Slika 202.1.

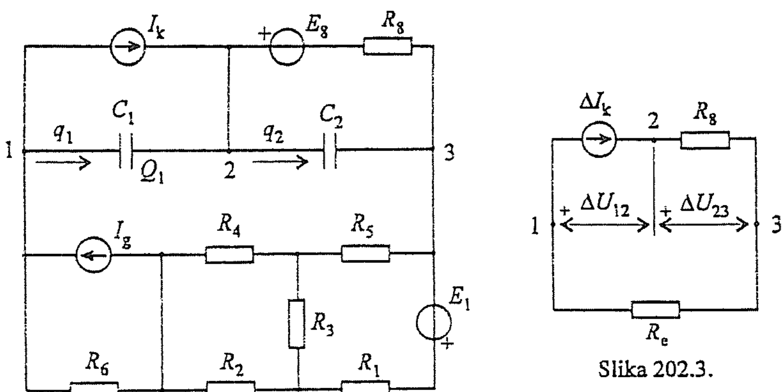
REŠENJE:
Granu sa otpornikom otpornosti R_1 i prekidačem Π možemo zameniti idealnim strujnim kompenzacionim generatorom. Zatvaranju prekidača ekvivalentan je priraštaj jačine struje tog generatora jednak $\Delta I_k = I'$, gde je I' jačina struje kompenzovane grane pri zatvorenom prekidaču (slika 204.2). Po teoremama superpozicije i linearnosti, za priraštaj napona kondenzatora od jednog do drugog stacionarnog stanja imamo (slika 204.3)

$$\Delta U_{12} = U_{12}(\Delta I_k) = R_{34} \Delta I_k = R_{34} I'\ , \qquad (204.1)$$

gde je $R_{34} = R_3 \parallel R_4 = 1,2\ k\Omega$.

U stacionarnom stanju kada je prekidač Π otvoren, napon kondenzatora je

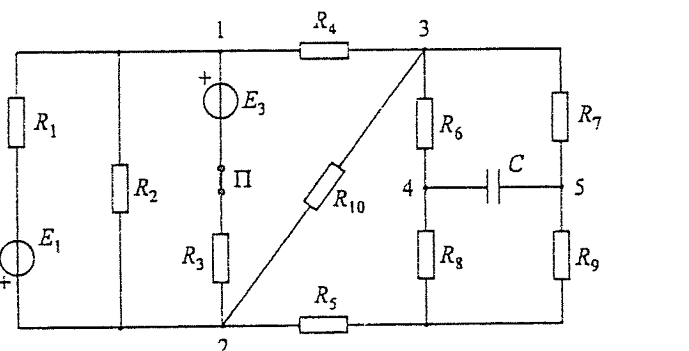
$$U_{12} = -E_2 + \frac{E_3 R_4}{R_3 + R_4} = -6\ V\ . \qquad (204.2)$$



Slika 202.2.

ΔI_k 2 R_8 1 ΔU_{12} ΔU_{23} 3 R_e

Slika 202.3.



Slika 203.1.

Kako je energija kondenzatora ista u oba stacionarna stanja, napon kondenzatora posle zatvaranja prekidača Π, U'_{12}, je

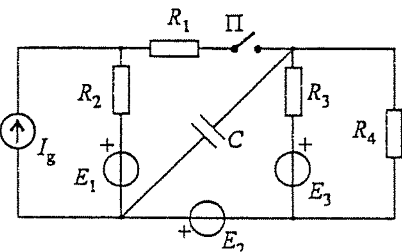
$$U'_{12} = U_{12} \quad (\Delta U_{12} = 0) \qquad \text{ili} \qquad U'_{12} = -U_{12} \quad (\Delta U_{12} = -2U_{12})\ . \qquad (204.3)$$

U prvom slučaju je, na osnovu (204.1), $I' = 0$, a u drugom $I' = -2U_{12}/R_{34} = 10$ mA, pa je napon idealnog strujnog generatora pri zatvorenom prekidaču Π, dat izrazom

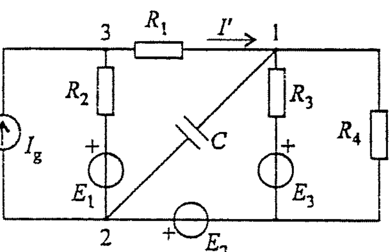
$$U'_{32} = U'_{12} + R_1 I' \qquad (204.4)$$

(videti sliku 204.2), u prvom slučaju negativan (−6 V), a u drugom pozitivan (14 V). Stoga, prema uslovima zadatka, drugi slučaj otpada. Konačno,

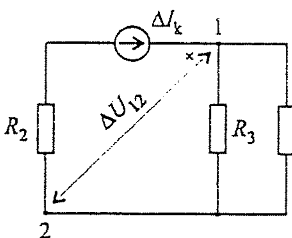
$$E_1 = U'_{32} - R_2 I_g = -16\ V\ . \qquad (204.5)$$



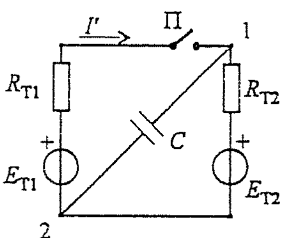
Slika 204.1.



Slika 204.2.



Slika 204.3.



Slika 204.4.

Zadatak ćemo rešiti i na drugi način, primenom Tevenenove teoreme. Naime, deo kola koji čine idealan naponski generator elektromotorne sile E_1, idealan strujni generator I_g i otpornici otpornosti R_1 i R_2 možemo zameniti Tevenenovim generatorom nepoznate elektromotorne sile

$$E_{T1} = E_1 + R_2 I_g \qquad (204.6)$$

i unutrašnje otpornosti $R_{T1} = R_1 + R_2 = 1,8\ \text{k}\Omega$. Na drugoj strani, deo kola koji čine idealni naponski generatori elektromotornih sila E_2 i E_3 i otpornici otpornosti R_3 i R_4 možemo zameniti Tevenenovim generatorom čija je elektromotorna sila jednaka naponu kondenzatora kada je prekidač Π otvoren, $E_{T2} = U_{12} = -6$ V [prema (204.2)] i unutrašnje otpornosti $R_{T2} = R_{34} = 1,2\ \text{k}\Omega$. Time dobijamo kolo prikazano na slici 204.4.

U stacionarnom stanju uspostavljenom nakon zatvaranja prekidača Π, napon kondenzatora je dat sledećim izrazom:

$$U'_{12} = \frac{E_{T1}R_{T2} + E_{T2}R_{T1}}{R_{T1} + R_{T2}}\,, \qquad (204.7)$$

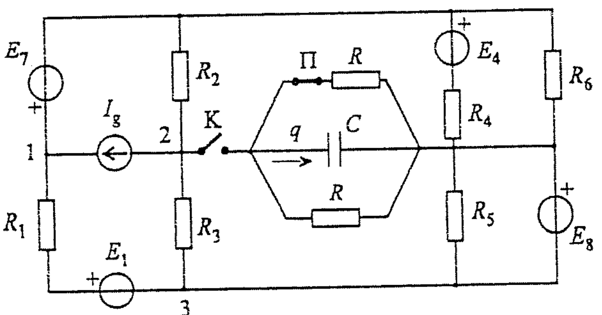
a, pošto se energija kondenzatora ne menja od jednog do drugog stacionarnog stanja, mora biti $U'_{12} = \pm U_{12} = \mp 6$ V.

Pod pretpostavkom $U'_{12} = -6$ V, iz (204.7) dobijamo $E_{T1} = -6$ V. Jačina struje kroz prekidač Π je

$$I' = \frac{-U'_{12} + E_{T1}}{R_{T1}} = 0\,, \qquad (204.8)$$

a iz (204.6) i (204.4) sledi $E_1 = -16$ V i $U'_{32} = -6$ V, respektivno. Snaga idealnog strujnog generatora je negativna. U drugom slučaju ($U'_{12} = 6$ V) je $E_{T1} = 24$ V, $I' = 10$ mA, $E_1 = 14$ V i $U'_{32} = 14$ V (pozitivna snaga idealnog strujnog generatora). Prema uslovima zadatka, rešenje je $E_1 = -16$ V.

205. Za kolo stalne struje prikazano na slici 205.1 je poznato: $E_7 = 41,6$ V, $I_g = 80$ mA, $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = R_4 = R_6 = 120\ \Omega$, $R_3 = R_5 = 300\ \Omega$ i $C = 2\ \mu$F. Prekidač K je otvoren, a prekidač Π zatvoren. Kada se zatvori i prekidač K, kroz granu sa kondenzatorom protekne $q = -80\ \mu$C, a u kolu se ustanove naponi $U_{12} = 50$ V i $U_{13} = 65$ V. Odrediti protok kroz kondenzator kada se, zatim, otvori samo prekidač Π. (*Z950406*)



Slika 205.1.

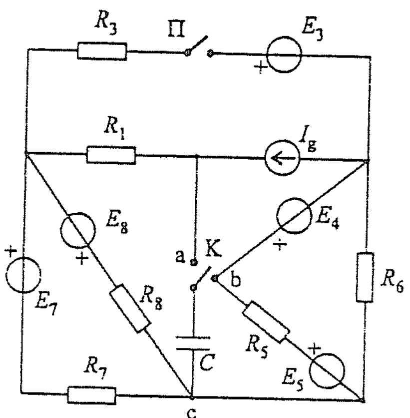
REZULTAT:
Protok je $q' = -5,58\ \mu$C.

206. Otpornici otpornosti $R_1 = R_3 = 250\ \Omega$, $R_5 = 500\ \Omega$, $R_6 = 750\ \Omega$ i $R_7 = R_8 = 400\ \Omega$, kondenzator kapacitivnosti $C = 0,5\ \mu$F, idealni naponski generatori poznatih elektromotornih sila $E_3 = 30$ V i $E_4 = 20$ V i nepoznatih elektromotornih sila E_5, E_7 i E_8, idealni strujni generator jačine struje $I_g = 20$ mA, prekidač Π i preklopnik K su vezani u kolo kao na slici 206.1. Prekidač Π je otvoren, a preklopnik K se prebaci iz položaja 'a' u položaj 'b', u kome i ostane. Po prebacivanju preklopnika, kroz kondenzator protekne količina elektriciteta $q_{bc} = -20\ \mu$C. Odrediti protok kroz kondenzator kada se, po uspostavljenom stacionarnom stanju u kolu, zatvori prekidač Π. (*Z950127*)

REZULTAT:
Po zatvaranju prekidača Π, protok je $q'_{bc} = 5\ \mu$C.

207. U kolu stalne struje prikazanom na slici 207.1 poznato je $E = 26$ V i $R = 10\ \Omega$. Izračunati ukupnu snagu svih otpornika. (*Z930831*)

REŠENJE:



Slika 206.1.

Zbog simetrije kola, jačina struje u srednjem otporniku je jednaka nuli. Po teoremi kompenzacije, granu sa tim otpornikom možemo zameniti otvorenom vezom. Na taj način, umesto zadatog kola možemo posmatrati samo jednu njegovu polovinu, prikazanu na slici 207.2.

Radi se o lestvičastoj mreži, a mreže toga tipa se najlakše rešavaju metodom proporcionalnih veličina (koja se zasniva na teoremi linearnosti). Pretpostavimo da je jačina struje grane koja je na suprotnom kraju mreže u odnosu na generator

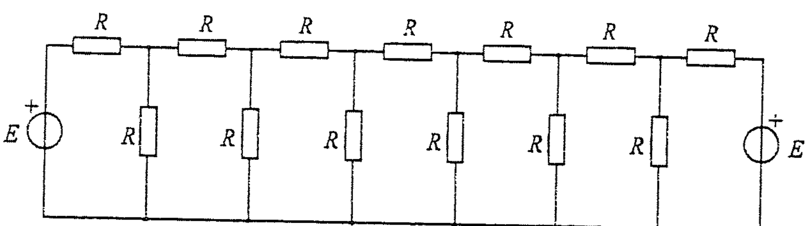
$$I_1' = 1\ \text{A}\,. \qquad (207.1)$$

Tada je, prema slici 207.2,

$$I_2' = I_1' = 1\ \text{A}\,, \qquad U_{20}' = R(I_1' + I_2') = 20\ \text{V}\,, \qquad I_3' = \frac{U_{20}'}{R} = 2\ \text{A}\,. \qquad (207.2)$$

Ponavljajući postupak, dobijamo, redom, $I_4' = 3\ \text{A}$, $I_5' = 5\ \text{A}$, $I_6' = 8\ \text{A}$ i

$$E' = U_{40}' = 130\ \text{V} \qquad (207.3)$$



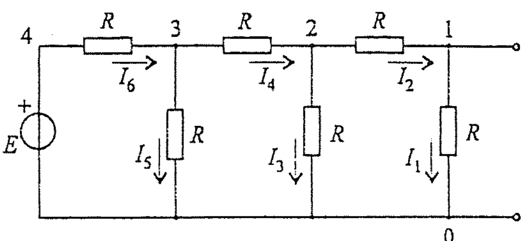
Slika 207.1.

Prava jačina struje idealnog naponskog generatora je, po teoremi linearnosti,

$$I_6 = aE = \frac{I_6'}{E'}E = 1,6\ \text{A}\,, \qquad (207.4)$$

a snaga koju generator razvija

$$P_E = EI_6 = 41,6\ \text{W}\,. \qquad (207.5)$$



Slika 207.2.

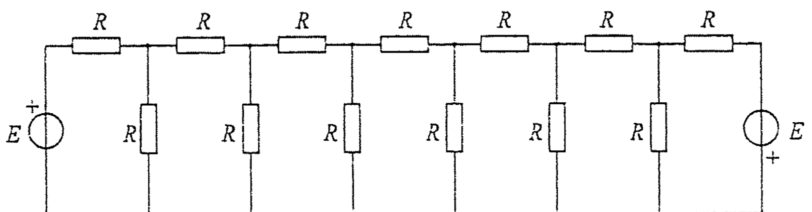
Zbog simetrije, istu snagu razvija i drugi idealni naponski generator u zadatom kolu.

Po teoremi održanja snage, ukupna snaga svih otpornika u mreži sa slike 207.1 jednaka je ukupnoj snazi oba generatora, tj.

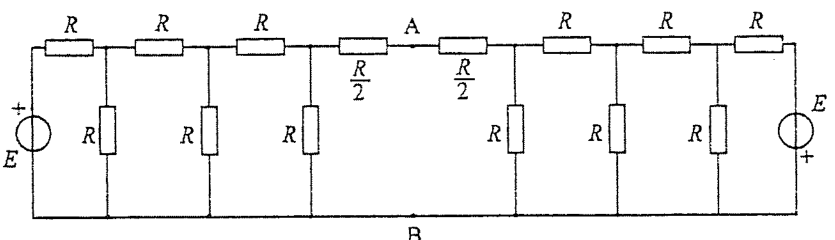
$$P_J = 2P_E = 83,2\ \text{W}\,. \qquad (207.6)$$

208. U kolu stalne struje prikazanom na slici 208.1 poznato je $E = 29$ V i $R = 10\ \Omega$. Izračunati ukupnu snagu svih otpornika.

REŠENJE:



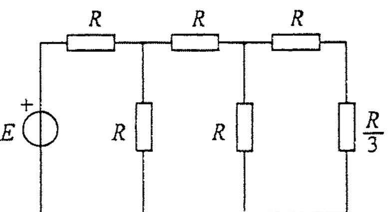
Slika 208.1.



Slika 208.2.

Predstavimo srednji otpornik u vidu redne veze dva otpornika otpornosti $R/2$ (slika 208.2). Zbog simetrije kola, napon U_{AB} jednak je nuli (naime, $V_A = V_B$). Stoga, po teoremi kompenzacije, deo kola desno od čvorova A i B možemo zameniti kratkim spojem. Na taj način, možemo posmatrati samo polovinu zadatog kola, prikazanu na slici 208.3.

Primenjujući metodu proporcionalnih veličina, za ukupnu snagu svih otpornika dobijamo $P_J = 104,4$ W.



Slika 208.3.

LITERATURA

1. Ranojević M. N.: "Osnovi elektrotehnike", Građevinska knjiga, Beograd, 1964.

2. Ranojević M. N.: "Naizmenične struje", Građevinska knjiga, Beograd, 1961.

3. Ranojević M. N.: "Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike", Građevinska knjiga, Beograd, 1969.

4. Surutka J. V.: "Osnovi elektrotehnike - Elektrostatika, Stalne jednosmerne struje", Naučna knjiga, Beograd, 1978.

5. Surutka J. V.: "Osnovi elektrotehnike - Elektromagnetizam", Naučna knjiga, Beograd, 1978.

6. Popović B. D.: "Osnovi elektrotehnike I", Građevinska knjiga, Beograd, 1976.

7. Popović B. D.: "Osnovi elektrotehnike II", Građevinska knjiga, Beograd, 1978.

8. Popović B. D. i Đorđević A. R.: "Osnovi elektrotehnike III", Građevinska knjiga, Beograd, 1979.

9. Božilović H. A., Spasojević Ž. A. i Božilović G. N.: "Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike - Elektrostatika, Stalne jednosmerne struje", Naučna knjiga, Beograd, 1983.

10. Božilović H. A., Spasojević Ž. A. i Božilović G. N.: "Zbirka zadataka iz Osnova elektrotehnike - Elektromagnetizam, Naizmenične struje", Naučna knjiga, Beograd, 1983.

11. Božilović G. N.: "Zadaci iz Osnova elektrotehnike", Naučna knjiga, Beograd, 1982.

12. Stojić R. M.: "Priručnik za laboratorijske vežbe iz Osnova elektrotehnike", Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1981.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

537.2(075.8)(076)

ЂОРЂЕВИЋ, Антоније Р.

Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz Osnova elektrotehnike. Deo 1, Elektrostatika, stalne električne struje / Antonije R. Đorđević, Gradimir N. Božilović, Branislav M. Notaroš - [2. izd.]. - Beograd : Elektrotehnički fakultet : Akademska misao, 2001 (Beograd : Zavod za grafičku tehniku Tehnološko-metalurškog fakulteta). - 159 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 500. - Bibliografija: str. 159.

ISBN 86-7466-046-0

1. Божиловић, Градимир Н. 2. Нотарош, Бранислав М.
537.31(075.8)(076)
621.3.011.024.1(075.8)(076)

a) Електростатика - Задаци b) Електрична кола - Задаци
ID=93451020

"Академска мисао" - предузеће за издаваштво, дизајн и маркетинг д.о.о.

Директор Марко Вујадиновић, дипл. инж. Тел: 063/30-10-75

Уредник Александар Рашковић, дипл. инж. Тел: 063/30-10-65